

**Association pour la Statistique et ses Utilisations**

**Ouvrage : PLANS D'EXPERIENCES**  
**Applications à l'entreprise**

**Chapitre 3 : LES PLANS FRACTIONNAIRES**

**A. Kobilinsky, Décembre 1996**

Ouvrage de l'ASU, édité par : J.J Droesbeke, J. Fine, G. Saporta

Auteurs : P.Dagnélie, J.P.Gauchi, A.Kobilinsky, D.Mathieu, R.Phan-Tan-Luu

Edition : Technip (1997)

Laboratoire de Biométrie.  
INRA. Route de St-Cyr.  
F78026 VERSAILLES Cedex.

## 3 Les plans factoriels

### 3.1 Introduction

Les plans considérés dans ce chapitre sont issus des travaux menés dans les années 1920-1940 sur les plans en blocs, notamment par Fisher et Yates à la station expérimentale de Rothamsted. Le problème auxquels ils étaient confrontés était la répartition d'un ensemble de traitements, définis par un ou plusieurs facteurs, en blocs homogènes.

Bien que des fractions de plans aient été employées dans l'industrie avant la seconde guerre mondiale [Tippett, 1934], ce n'est qu'après guerre que Finney [1945] publie la première étude théorique sur ce sujet, en s'appuyant sur les techniques précédemment mises au point pour les plans en blocs. Dans les fractions considérées par Finney, tous les facteurs ont un même nombre  $p$  de niveaux qui est soit 2, soit 3, et le nombre  $N$  d'unités est une puissance de  $p$ . Les fractions pour facteurs à 2 niveaux de Plackett et Burman [1946], introduites peu après, donnent plus de souplesse dans le choix du nombre d'unités qui peut être presque n'importe quel multiple de 4. Mais elles ne peuvent être utilisées pour estimer les effets principaux que lorsque les interactions sont toutes supposées négligeables.

C'est essentiellement à partir de 1960 que les statisticiens et combinatorialistes s'intéressent aux fractions dans le cas dit *asymétrique* où les facteurs n'ont pas tous le même nombre de niveaux. Puis de 1970 à nos jours, le développement des ordinateurs favorise une recherche plus systématique, parmi les fractions construites par une méthode algébrique ou combinatoire, de celles qui sont le mieux adaptées à certains types de modèle.

À partir de 1950, les recherches sur les plans optimaux et leur construction se sont développées parallèlement à ces méthodes combinatoires. Il est naturel de s'interroger sur les places respectives de ces deux types de plans et de se demander s'il est nécessaire, alors que l'on dispose d'algorithmes perfectionnés pour trouver le plan "optimal" à  $N$  unités à partir du modèle, d'investir pour connaître les différentes constructions combinatoires.

En fait, dans bien des cas, beaucoup de latitude existe quant au choix des facteurs, de leurs niveaux, du nombre d'unités et l'expérimentateur n'a qu'une connaissance très floue du modèle. Dans ce contexte, la connaissance des constructions combinatoires permet de savoir ce qu'il est possible de réaliser et ainsi de mieux s'orienter.

Les constructions combinatoires ont aussi souvent des propriétés de robustesse qui les rendent moins sensibles au flou dans le modèle que les plans optimaux.

Nous mettrons l'accent ici en particulier sur certaines de ces constructions appelées plans *réguliers*. Ces derniers ont des propriétés d'optimalité très fortes dont ne bénéficient pas en règle générale les plans obtenus par une procédure algorithmique qui ne peut optimiser qu'un critère à la fois. Ils ont aussi des propriétés remarquables qui facilitent beaucoup l'analyse, y compris dans des cas où le nombre de paramètres du modèle supposé est bien supérieur au nombre d'unités.

Un autre intérêt des constructions combinatoires est de bien s'adapter à certains types de contraintes fréquemment rencontrés en pratique, comme la constance du nombre de répétitions de certaines combinaisons de niveaux des facteurs. Avec les algorithmes de

constructions algorithmiques aujourd'hui disponibles, de telles contraintes ne peuvent pas être prises en compte.

Pour ces raisons, les constructions combinatoires restent et resteront certainement longtemps encore un outil de choix dans la panoplie des expérimentateurs. Et ainsi que le souligne Bailey (1996), la connaissance des principes et méthodes gouvernant ces constructions est indispensable pour les utiliser pleinement et à bon escient.

## 3.2 Introduction aux fractions régulières

La propriété caractéristique de ces fractions est que les effets  $y$  sont soit estimables indépendamment, soit complètement confondus. La plupart d'entre elles peuvent être générées par une méthode dérivée de la méthode de la matrice clé [Patterson et Bailey, 1978], dans laquelle les unités expérimentales sont repérées par les niveaux d'un certain nombre de facteurs, appelés *facteurs de base*, et les niveaux des autres facteurs, dits *facteurs définis*, sont déduits par des règles algébriques simples. Nous détaillons ici cette méthode dans le cas très important en pratique des fractions de plan pour facteurs à 2 niveaux et considérons ensuite l'extension aux fractions de plans pour facteurs à 3 niveaux. On se reportera pour une présentation plus générale à Kobilinsky et Monod [1991, 1995].

Les paragraphes suivants précisent la méthode et ses propriétés dans le cas simple d'une fraction d'un  $2^3$ . On donne les règles de construction, puis la définition précise des effets factoriels qui servent à expliciter les propriétés. Rappelons que la notation  $2^3$  désigne les 8 expériences du plan factoriel complet pour 3 facteurs à 2 niveaux.

Le recours à un exemple de petite taille permet de rendre le développement plus concret. L'extrapolation à des cas impliquant un plus grand nombre de facteurs, cas où le recours à une fraction apparaît clairement indispensable en raison du nombre de traitements étudiés, se fait sans difficulté.

### 3.2.1 Construction d'une fraction $1/2$ d'un $2^3$

Il y a 4 unités repérées par les combinaisons de niveaux de 2 facteurs de base  $A$ ,  $B$  ayant chacun 2 niveaux codés 0 et 1. A partir de ces deux facteurs de base, on définit le troisième facteur  $C$  en posant  $C = A + B \pmod{2}$ . Ce même plan peut être aussi défini par la relation  $C = AB$  si l'on code 1 et  $-1$  les niveaux. Pour distinguer les deux codages et présentations associées, on parle de notation *additive* dans le premier cas, de notation *multiplicative* dans le second. Le passage de la notation additive à la notation multiplicative s'opère en remplaçant chaque niveau  $\alpha$  par le niveau  $(-1)^\alpha$ . Le tableau 3.1 présente le plan sous ses deux formes. Une telle fraction est souvent appelée fraction  $2^{3-1}$ . Plus généralement, une fraction  $1/2^m$  d'un  $2^h$  est appelée *fraction*  $2^{h-m}$ .

$C = A + B$			$C = AB$		
(mod 2)					
A	B	C	A	B	C
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	-1	-1
1	0	1	-1	1	-1
1	1	0	-1	-1	1

TAB. 3.1 – Fraction 1/2 d'un  $2^3$

### 3.2.2 Effets factoriels

On suppose que l'espérance de la réponse  $y$  dépend exclusivement du traitement  $(A,B,C)$  expérimenté :

$$E(y) = \tau(A,B,C) . \tag{3.1}$$

Cette espérance est aussi appelée *réponse théorique* ou *moyenne théorique* ou *effet du traitement*  $(A,B,C)$ .

Une expérience factorielle peut avoir pour objectif d'évaluer les réponses théoriques des différents traitements. Souvent cependant, au départ d'études où beaucoup de facteurs entrent en jeu, l'objectif est d'abord de déterminer les facteurs importants et leurs possibles interactions. On s'intéresse alors primordialement aux *effets factoriels*, qui comprennent les effets principaux des facteurs et les interactions de deux facteurs ou plus. Il sera commode d'inclure aussi sous cette appellation la moyenne générale.

On entend ici, par effet factoriel, soit l'espace de toutes les combinaisons linéaires des réponses théoriques appartenant à une interaction ou un effet principal donné, soit l'une de ces combinaisons. A l'exception de la moyenne générale, une telle combinaison est appelée aussi *contraste*, parce qu'elle oppose entre elles certaines réponses théoriques, ce qui se traduit, lorsque on accorde le même poids à tous les traitements, par la nullité de la somme des coefficients de cette combinaison. Dans le cas des facteurs à deux niveaux, la nuance entre l'effet factoriel espace et l'effet factoriel réduit à un contraste est sans importance car l'espace est toujours de dimension 1. Dans les autres cas, la distinction se fait par le contexte.

Dans le cas avec trois facteurs de l'exemple, les effets factoriels sont définis comme suit.

- La *moyenne générale* notée  $\mathbf{1}$  ou  $e(\mathbf{1})$  est la moyenne équipondérée des 8 réponses

théoriques. Avec la notation multiplicative 1, -1 des niveaux, elle s'écrit

$$\begin{aligned} e(\mathbf{1}) &= \bar{\tau}(\cdot, \cdot, \cdot) = \frac{1}{8} \sum_{A,B,C} \tau(A,B,C) \\ &= \frac{1}{8} \left( \tau(1,1,1) + \tau(1,1,-1) + \tau(1,-1,1) + \tau(1,-1,-1) + \right. \\ &\quad \left. \tau(-1,1,1) + \tau(-1,1,-1) + \tau(-1,-1,1) + \tau(-1,-1,-1) \right). \end{aligned}$$

La barre sur le  $\tau$  indique qu'il s'agit d'une moyenne et les points ( $\cdot$ ) indiquent qu'on a fait la moyenne sur les lettres correspondantes. On a donc par exemple :

$$\bar{\tau}(A,B,\cdot) = \frac{1}{2} \left( \tau(A,B,1) + \tau(A,B,-1) \right)$$

$$\bar{\tau}(A,\cdot,\cdot) = \frac{1}{4} \left( \tau(A,1,1) + \tau(A,1,-1) + \tau(A,-1,1) + \tau(A,-1,-1) \right).$$

- L'effet principal du facteur  $A$ , notée  $A$  ou  $e(A)$ , est la demi différence entre les moyennes des 4 réponses théoriques aux deux niveaux de  $A$  :

$$\begin{aligned} e(A) &= \frac{1}{2} \left( \bar{\tau}(1,\cdot,\cdot) - \bar{\tau}(-1,\cdot,\cdot) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\tau(1,1,1) + \tau(1,1,-1) + \tau(1,-1,1) + \tau(1,-1,-1)}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau(-1,1,1) + \tau(-1,1,-1) + \tau(-1,-1,1) + \tau(-1,-1,-1)}{4} \right). \end{aligned}$$

Il peut aussi se mettre sous la forme

$$e(A) = \frac{1}{8} \sum_{A,B,C} A \tau(A,B,C) = \frac{1}{2} \sum_A A \bar{\tau}(A,\cdot,\cdot). \quad (3.2)$$

- L'interaction entre les facteurs  $A$  et  $B$ , notée  $AB$  ou  $e(AB)$ , est la demi-différence entre l'effet  $e(A/B = 1)$  de  $A$  pour  $B = 1$  et l'effet  $e(A/B = -1)$  de  $A$  pour  $B = -1$  :

$$\begin{aligned} e(A/B = 1) &= \frac{1}{2} \left( \bar{\tau}(1,1,\cdot) - \bar{\tau}(-1,1,\cdot) \right) \\ e(A/B = -1) &= \frac{1}{2} \left( \bar{\tau}(1,-1,\cdot) - \bar{\tau}(-1,-1,\cdot) \right) \end{aligned}$$

$$e(AB) = \frac{1}{2} \left( e(A/B = 1) - e(A/B = -1) \right).$$

Elle peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}
 e(AB) &= \frac{1}{4} \left( \bar{\tau}(1,1,\cdot) - \bar{\tau}(-1,1,\cdot) - \bar{\tau}(1,-1,\cdot) + \bar{\tau}(-1,-1,\cdot) \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{A,B} AB \bar{\tau}(A,B,\cdot) \\
 &= \frac{1}{8} \sum_{A,B,C} AB \tau(A,B,C)
 \end{aligned}$$

Les facteurs  $A$  et  $B$  apparaissent de façon symétrique dans ces dernières expressions. L'interaction entre  $A$  et  $B$  est donc égale à l'interaction entre  $B$  et  $A$  et se définit aussi comme la demi-différence entre les effets  $e(B/A = 1)$  et  $e(B/A = -1)$  de  $B$  aux niveaux 1 et  $-1$  de  $A$

$$e(AB) = e(BA) = \frac{1}{2} \left( e(B/A = 1) - e(B/A = -1) \right) .$$

La figure 3.1 représente graphiquement l'interaction  $AB$  dans trois cas. A gauche, il n'y a pas d'interaction. L'effet du facteur  $A$  est le même aux deux niveaux de  $B$ . Au centre, l'interaction existe mais ne modifie pas fondamentalement la nature des phénomènes. L'effet de  $A$  garde un même signe aux deux niveaux de  $B$ . A droite, l'interaction est beaucoup plus forte. Les effets de  $A$  aux deux niveaux de  $B$  sont de signes opposés.

L'ordonnée de ces graphiques est la moyenne théorique  $\bar{\tau}(A,B,\cdot)$ , qui peut être approchée par l'expérimentation en multipliant les répétitions mais ne peut jamais être atteinte. Cela n'interdit pas de s'en faire une représentation mentale, représentation qu'il faut distinguer de la représentation analogue où l'on reporte en ordonnée l'estimation  $\hat{\tau}(A,B,\cdot)$  de cette même moyenne.

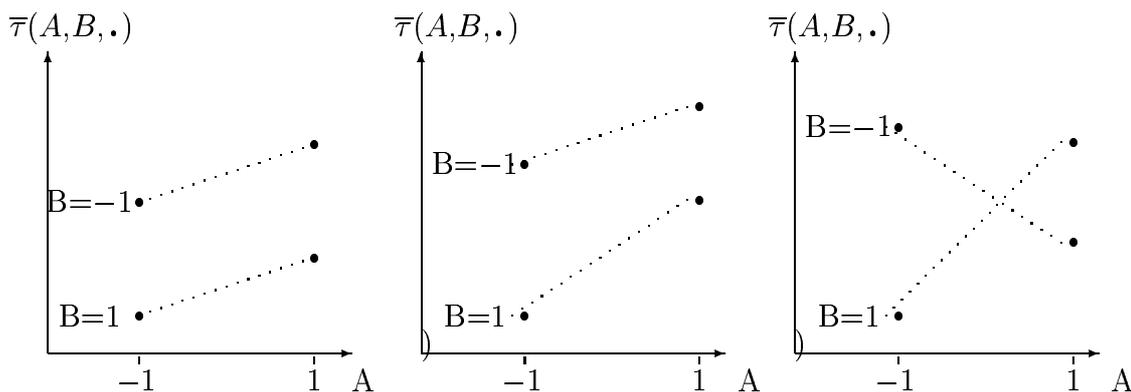


FIG. 3.1 – Représentation de l'interaction  $AB$  dans trois cas de figure

On ne s'intéresse ici qu'au deux niveaux codés  $-1$  et  $1$  de  $A$ , que  $A$  soit un facteur quantitatif ou qualitatif. Les traits en pointillés sont donc là uniquement pour permettre de repérer des niveaux identiques de  $B$ .

– De même, l'interaction des trois facteurs, notée  $ABC$  ou  $e(ABC)$ , est définie de même comme la demi-différence

$$e(ABC) = \frac{1}{2} \left( e(AB/C = 1) - e(AB/C = -1) \right)$$

où  $e(AB/C = 1)$ ,  $e(AB/C = -1)$  sont les interactions entre  $A$  et  $B$  aux niveaux 1 et  $-1$  de  $C$  respectivement :

$$\begin{aligned} e(AB/C = 1) &= \frac{1}{4} \left( \tau(1,1,1) - \tau(-1,1,1) - \tau(1, -1,1) + \tau(-1, -1,1) \right) \\ e(AB/C = -1) &= \frac{1}{4} \left( \tau(1,1, -1) - \tau(-1,1, -1) - \tau(1, -1, -1) + \tau(-1, -1, -1) \right) \end{aligned}$$

Elle s'écrit aussi sous la forme suivante, symétrique en  $A$ ,  $B$  et  $C$

$$e(ABC) = \frac{1}{8} \sum_{A,B,C} ABC \tau(A,B,C) . \quad (3.3)$$

– Les autres effets principaux  $e(B)$ ,  $e(C)$  et interactions de deux facteurs  $e(AC)$ ,  $e(BC)$  se définissent de façon analogue à  $e(A)$  et  $e(AB)$ .

On peut résumer ces définitions par une formule unique

$$e(A^a B^b C^c) = \frac{1}{8} \sum_{A,B,C} A^a B^b C^c \tau(A,B,C) . \quad (3.4)$$

Dans cette formule, les exposants  $a$ ,  $b$ ,  $c$  prennent la valeur 1 ou 0 selon que le facteur figure ou pas dans l'effet. Ainsi pour  $e(AB) = e(A^1 B^1 C^0)$ , on a  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ . Les lettres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  représentent les niveaux, codés 1 ou  $-1$ , des facteurs correspondants. La sommation porte donc sur les 8 triplets  $(A,B,C)$  de 1 et  $-1$ . A la division par 8 près, chaque effet est donc la combinaison linéaire des 8 réponses théoriques qui a pour coefficients les produits de niveaux des facteurs associés.

Les coefficients  $A^a B^b C^c$  sont reportés dans le tableau 3.2 dont les lignes correspondent aux triplets de traitements  $(A,B,C)$  et les colonnes aux triplets d'exposants  $(a,b,c)$  associés aux différents effets. Chaque colonne de ce tableau donne donc les coefficients à appliquer aux réponses théoriques figurant à gauche pour obtenir, à la division par 8 près, l'effet en haut de cette colonne. Noter que les colonnes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  donnent les niveaux des 3 facteurs, et que les colonnes suivantes  $AB$  à  $ABC$  s'en déduisent en effectuant les produits correspondants.

Soit  $Z$  la matrice de dimension  $8 \times 8$  apparaissant dans le tableau 3.2,  $\mathbf{e}$  le vecteur colonne des 8 effets factoriels,  $\boldsymbol{\tau}$  le vecteur des 8 réponses théoriques. Les effets factoriels sont reliés aux effets des traitements par l'égalité

$$\mathbf{e} = \frac{1}{8} Z' \boldsymbol{\tau} \quad (3.5)$$

$a$	0	1	0	0	1	1	0	1	
$b$	0	0	1	0	1	0	1	1	
$c$	0	0	0	1	0	1	1	1	
$\tau( A, B, C)$	<b>1</b>	$A$	$B$	$C$	$AB$	$AC$	$BC$	$ABC$	
$\tau( 1, 1, 1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	←
$\tau( 1, 1, -1)$	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	
$\tau( 1, -1, 1)$	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	
$\tau( 1, -1, -1)$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	←
$\tau(-1, 1, 1)$	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	
$\tau(-1, 1, -1)$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	←
$\tau(-1, -1, 1)$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	←
$\tau(-1, -1, -1)$	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	

TAB. 3.2 – *Matrice Z définissant les effets factoriels*

Chaque colonne donne les coefficients à appliquer aux réponses théoriques figurant à gauche pour obtenir l'effet factoriel correspondant (à la division par 8 près). Chaque ligne donne les coefficients à appliquer aux effets factoriels figurant en haut des colonnes pour reconstituer la réponse théorique associée. Les flèches à droite indiquent les traitements retenus dans la 1/2 fraction du tableau 3.1.

qui s'écrit sous la forme développée suivante

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} e(\mathbf{1}) \\ e(A) \\ e(B) \\ e(C) \\ e(AB) \\ e(AC) \\ e(BC) \\ e(ABC) \end{array} \right] \\
 \mathbf{e}
 \end{array}
 = \frac{1}{8}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 \mathbf{Z}'
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} \tau( 1, 1, 1) \\ \tau( 1, 1, -1) \\ \tau( 1, -1, 1) \\ \tau( 1, -1, -1) \\ \tau(-1, 1, 1) \\ \tau(-1, 1, -1) \\ \tau(-1, -1, 1) \\ \tau(-1, -1, -1) \end{array} \right] \\
 \boldsymbol{\tau}
 \end{array}$$

La matrice  $Z$  du tableau 3.2 a une propriété remarquable. Ses colonnes sont deux à deux orthogonales, c'est-à-dire ont des produits scalaires nuls. Elle vérifie donc

$$Z'Z = ZZ' = 8\mathbf{I} \quad (3.6)$$

(une matrice de 1 et  $-1$  vérifiant une telle propriété est appelée *matrice d'Hadamard*). Si on prémultiplie par  $Z$  l'égalité (3.5), on obtient alors l'égalité

$$\boldsymbol{\tau} = Z\mathbf{e} . \quad (3.7)$$

Cette égalité permet d'exprimer les réponses théoriques en fonction des effets factoriels. La réponse  $\tau(A,B,C)$  est la combinaison linéaire des effets factoriels dont les coefficients figurent sur la ligne correspondante du tableau 3.2. Elle peut s'écrire sous la forme

$$\tau(A,B,C) = \sum_{a,b,c} A^a B^b C^c e(A^a B^b C^c) . \quad (3.8)$$

ou encore en développant

$$\begin{aligned} \tau(A,B,C) = & e(\mathbf{1}) + A e(A) + B e(B) + C e(C) + AB e(AB) \\ & + AC e(AC) + BC e(BC) + ABC e(ABC) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

**Exemple :**

$$\tau(1,1, - 1) = e(\mathbf{1}) + e(A) + e(B) - e(C) + e(AB) - e(AC) - e(BC) - e(ABC) .$$

Les coefficients des effets sont ceux qui apparaissent sur la ligne associée au traitement (1,1, - 1) du tableau 3.2 (seconde ligne).

L'égalité (3.7) permet donc de passer du modèle (3.1) à un modèle ayant pour paramètres les effets factoriels. Dans le cas d'une fraction régulière, ce dernier modèle prend une forme très simple d'où l'on dérive sans difficulté les propriétés de la fraction, comme cela est illustré dans le paragraphe qui suit.

### 3.2.3 Confusion d'effets

Si on convient d'indicer chaque observation par les niveaux des facteurs de base  $A, B$ , l'application du modèle (3.1) aux unités de la 1/2 fraction du tableau 3.1 donne

$$E(y(A,B)) = \tau(A,B,C) \quad \text{où } C = AB$$

soit en détaillant

$$\begin{aligned} E(y( 1, 1)) &= \tau( 1, 1, 1) , \\ E(y( 1, -1)) &= \tau( 1, -1, -1) , \\ E(y(-1, 1)) &= \tau(-1, 1, -1) , \\ E(y(-1, -1)) &= \tau(-1, -1, 1) . \end{aligned}$$

On en déduit, en remplaçant les réponses théoriques par leur expression en fonction des effets factoriels, le modèle linéaire

$$\begin{aligned} E(y( 1, 1)) &= e(\mathbf{1}) + e(A) + e(B) + e(C) + e(AB) + e(AC) + e(BC) + e(ABC) , \\ E(y( 1, -1)) &= e(\mathbf{1}) + e(A) - e(B) - e(C) - e(AB) - e(AC) + e(BC) + e(ABC) , \\ E(y(-1, 1)) &= e(\mathbf{1}) - e(A) + e(B) - e(C) - e(AB) + e(AC) - e(BC) + e(ABC) , \\ E(y(-1, -1)) &= e(\mathbf{1}) - e(A) - e(B) + e(C) + e(AB) - e(AC) - e(BC) + e(ABC) . \end{aligned}$$

La forme matricielle correspondante est

$$E(\mathbf{y}) = X\mathbf{e} \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{y}$  est le vecteur des 4 observations,  $\mathbf{e}$  le vecteur des 8 effets factoriels et  $X$  la matrice  $4 \times 8$  formée des lignes marquées par une flèche dans le tableau 3.2, qui sont reportées pour faciliter leur examen dans le tableau 3.3. Sur ces lignes, on a  $C = AB$  par définition de la fraction. Comme  $C^2 = 1$ , la multiplication par  $C$  donne  $ABC = 1$ , d'où l'on déduit

$\tau( A, B, C)$	$\mathbf{1}$	$A$	$B$	$C$	$AB$	$AC$	$BC$	$ABC$	
$\tau( 1, 1, 1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	←
$\tau( 1, -1, -1)$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	←
$\tau(-1, 1, -1)$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	←
$\tau(-1, -1, 1)$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	←
	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_A$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_C$	$\mathbf{x}_{AB}$	$\mathbf{x}_{AC}$	$\mathbf{x}_{BC}$	$\mathbf{x}_{ABC}$	

TAB. 3.3 – Matrice  $X$  du modèle linéaire pour la fraction 1/2

en multipliant par  $A$  puis  $B$  les identités  $A = BC$  et  $B = AC$ . Si on note  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_A, \dots, \mathbf{x}_{ABC}$  les colonnes de  $X$  respectivement associées à  $\mathbf{1}, A, \dots, ABC$ , on a donc

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{ABC}, \quad \mathbf{x}_A = \mathbf{x}_{BC}, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{x}_{AC}, \quad \mathbf{x}_{AB} = \mathbf{x}_C. \quad (3.11)$$

En y faisant apparaître les colonnes de  $X$ , le modèle (3.10) s'écrit

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}) = & e(\mathbf{1}) \mathbf{x}_1 + e(A) \mathbf{x}_A + e(B) \mathbf{x}_B + e(C) \mathbf{x}_C + e(AB) \mathbf{x}_{AB} \\ & + e(AC) \mathbf{x}_{AC} + e(BC) \mathbf{x}_{BC} + e(ABC) \mathbf{x}_{ABC} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}) = & \left( e(\mathbf{1}) + e(ABC) \right) \mathbf{x}_1 + \left( e(A) + e(BC) \right) \mathbf{x}_A + \\ & \left( e(B) + e(AC) \right) \mathbf{x}_B + \left( e(C) + e(AB) \right) \mathbf{x}_C. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cette dernière forme fait clairement apparaître qu'on ne peut pas estimer tous les effets factoriels, mais seulement les sommes d'effets apparaissant entre parenthèses dans (3.12). Ces sommes sont appelées *fonctions estimables de base*, de façon abrégée *f.e.b.* Deux effets tels que  $e(A)$  et  $e(BC)$  figurant dans une telle f.e.b, qui ne peuvent être estimés séparément, sont dit *confondus* ou *aliasés*.

L'écriture matricielle de (3.12) est

$$\begin{aligned} E \begin{bmatrix} y( 1, 1) \\ y( 1, -1) \\ y(-1, 1) \\ y(-1, -1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(\mathbf{1}) + e(ABC) \\ e(A) + e(BC) \\ e(B) + e(AC) \\ e(C) + e(AB) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= X_0 \boldsymbol{\gamma} \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $X_0$  est la matrice  $4 \times 4$  et  $\boldsymbol{\gamma}$  le vecteur de paramètres figurant à droite.

Une propriété remarquable de la fraction considérée est que les colonnes de  $X$  qui ne sont pas identiques sont orthogonales, ce qui se traduit par l'égalité

$$X_0' X_0 = 4 \mathbf{I} \quad (3.14)$$

que l'on vérifie immédiatement dans cet exemple. Cette propriété est un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général qui s'applique à toutes les fractions construites de façon similaire à partir des facteurs de base. On pourra se reporter à Kobilinsky et Monod [1995] pour la démonstration de ce résultat, qui fait appel à quelques propriétés élémentaires des groupes abéliens.

Dans la suite, il sera commode de noter  $\gamma(\mathbf{1})$ ,  $\gamma(A)$ ,  $\gamma(B)$ ,  $\gamma(AB)$  les fonctions estimables de base apparaissant dans le vecteur  $\boldsymbol{\gamma}$ :

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{1}) &= e(\mathbf{1}) + e(ABC), & \gamma(A) &= e(A) + e(BC), \\ \gamma(B) &= e(B) + e(AC), & \gamma(AB) &= e(C) + e(AB).\end{aligned}\tag{3.15}$$

### 3.2.4 Analyse : estimation, tests, intervalles de confiance

L'estimateur des moindres carrés de  $\boldsymbol{\gamma}$  est  $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (X_0'X_0)^{-1}X_0'\mathbf{y}$ . Compte tenu de (3.14), il s'écrit

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{\gamma}(\mathbf{1}) \\ \hat{\gamma}(A) \\ \hat{\gamma}(B) \\ \hat{\gamma}(AB) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \widehat{e(\mathbf{1}) + e(ABC)} \\ \widehat{e(A) + e(BC)} \\ \widehat{e(B) + e(AC)} \\ \widehat{e(AB) + e(AB)} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1, 1) \\ y(1, -1) \\ y(-1, 1) \\ y(-1, -1) \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}} &= \frac{1}{4} X_0' \mathbf{y}.\end{aligned}$$

Cette expression fournit des estimateurs sans biais des fonctions estimables de base. Ces estimateurs s'obtiennent aussi en effectuant les produits scalaires entre les colonnes de  $X_0$  et  $\mathbf{y}$  et en divisant le résultat par le nombre 4 d'unités du plan :

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(\mathbf{1}) &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 \rangle / 4 = \sum_{A,B} y(A,B) / 4 \\ \hat{\gamma}(A) &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_A \rangle / 4 = \sum_{A,B} A y(A,B) / 4 \\ \hat{\gamma}(B) &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_B \rangle / 4 = \sum_{A,B} B y(A,B) / 4 \\ \hat{\gamma}(AB) &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_{AB} \rangle / 4 = \sum_{A,B} AB y(A,B) / 4.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Les trois derniers termes s'obtiennent comme demi-différences entre des moyennes d'observations. Par exemple  $\hat{\gamma}(AB)$  est la demi-différence entre la moyenne des deux observations pour lesquelles  $AB = C = 1$  et la moyenne des deux pour lesquelles  $AB = C = -1$ . Dans la suite, il arrivera pour alléger les notations que l'on remplace les vecteurs indicés tels que  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_A$ ,  $\mathbf{x}_B$ ,  $\mathbf{x}_{AB}$  par leurs indices et donc les produits scalaires ci-dessus par  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{1} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{y}, A \rangle$ ,  $\langle \mathbf{y}, B \rangle$ ,  $\langle \mathbf{y}, AB \rangle$ .

Sous l'hypothèse usuelle d'indépendance et d'égalité des variances, qui implique que la matrice de covariance de  $\mathbf{y}$  a la forme

$$\text{Var}(\mathbf{y}) = \sigma^2 \mathbf{I},\tag{3.17}$$

ces estimateurs sont de variance minimale parmi les estimateurs sans biais. L'identité (3.14) entraîne de plus qu'ils sont non corrélés de variance  $\sigma^2/4$ :

$$\text{Var}(\hat{\gamma}) = \frac{\sigma^2}{4} \mathbf{I}_4$$

Si on suppose la distribution de  $\mathbf{y}$  normale et que l'on dispose, grâce à des expériences antérieures, d'un estimateur  $\hat{\sigma}^2$  de  $\sigma^2$  distribué comme un  $\chi_r^2/r$ , on peut alors tester la nullité des f.e.b dans  $\gamma$  ou en obtenir des intervalles de confiance :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{1}) &= \hat{\gamma}(\mathbf{1}) \pm t_\alpha \hat{\sigma}/2, \\ \gamma(A) &= \hat{\gamma}(A) \pm t_\alpha \hat{\sigma}/2, \\ \gamma(B) &= \hat{\gamma}(B) \pm t_\alpha \hat{\sigma}/2, \\ \gamma(C) &= \hat{\gamma}(C) \pm t_\alpha \hat{\sigma}/2. \end{aligned}$$

Le coefficient  $t_\alpha$  est la valeur qui a la probabilité  $\alpha$  d'être dépassée par la valeur absolue d'un  $t$  de student à  $r$  degrés de liberté. Les intervalles de confiance ci-dessus ont donc un degré de confiance  $1 - \alpha$ . Les tests correspondants reviennent à examiner si l'intervalle recouvre ou pas la valeur 0. Leur risque de première espèce est  $\alpha$ .

L'interprétation des tests ou intervalles de confiance est simple si on suppose les interactions nulles, car les sommes dans (3.15) se réduisent alors à la moyenne générale  $e(\mathbf{1})$  et aux effets principaux  $e(A)$ ,  $e(B)$ ,  $e(C)$ .

### 3.2.5 Analyse : une approche plus empirique

Dans cet exemple de petite taille, où aucun traitement n'est répété, il n'est pas possible d'utiliser l'expérience elle-même pour estimer la variance d'erreur  $\sigma^2$ . L'approche statistique repose donc sur l'existence d'une estimation préalable de  $\sigma^2$ .

Lorsqu'on ne dispose pas d'une estimation fiable de  $\sigma^2$ , on a souvent une idée de son ordre de grandeur, ou tout au moins de l'amplitude des variations de la réponse qui méritent considération. Cette idée préalable, jointe à la comparaison des estimations, peut permettre de juger que certaines des f.e.b.  $\gamma(A)$ ,  $\gamma(B)$ ,  $\gamma(C)$  sont importantes et donc que les effets factoriels qu'elles contiennent ont un impact non négligeable sur la réponse.

L'ordre de grandeur des estimations de  $\gamma(A)$ ,  $\gamma(B)$ ,  $\gamma(C)$  peut aussi permettre de se forger une opinion sur l'hypothèse d'absence d'interactions. Si par exemple seule la f.e.b.  $e(A) + e(BC)$  conduit à une estimation  $\hat{\gamma}(A)$  importante, on est conforté dans l'idée que cette importance est attribuable plutôt à l'effet principal de  $A$  qu'à l'interaction  $BC$ . Il est en effet peu vraisemblable que l'interaction  $BC$  soit d'un ordre de grandeur très supérieur aux effets principaux  $B$ ,  $C$  correspondants, et donc aux sommes  $e(B) + e(AC)$ ,  $e(C) + e(AB)$ . Si il n'y a que deux estimations  $\hat{\gamma}(A)$ ,  $\hat{\gamma}(B)$  importantes, il paraît de même raisonnable d'attribuer cette importance aux effets principaux  $A$  et  $B$  plutôt qu'aux interactions  $BC$  et  $AC$ .

Nous verrons qu'on utilise ce même raisonnement chaque fois que le nombre des facteurs étudiés amène des confusions entre plusieurs effets factoriels non négligeables a priori.

### 3.2.6 La fraction 1/2 complémentaire

Si on définit le facteur  $C$  par  $C = -AB$  au lieu de  $C = AB$ , on obtient le plan du tableau 3.4, 1/2 fraction du  $2^3$  complémentaire de celle du tableau 3.1. La définition en notation additive est  $C = 1 + A + B \pmod{2}$ . Dans ce plan, on a

$$1 = -ABC, \quad A = -BC, \quad B = -AC, \quad C = -AB.$$

$C = 1 + A + B$ (mod 2)			$C = -AB$		
$A$	$B$	$C$	$A$	$B$	$C$
0	0	1	1	1	-1
0	1	0	1	-1	1
1	0	0	-1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1

TAB. 3.4 – Fraction 1/2 complémentaire du  $2^3$

Paramétré en fonction des effets factoriels, le modèle associé à cette fraction prend la forme (3.10) où la matrice  $X$  est formée des lignes sans flèche du tableau 3.2. Pour faciliter son examen, cette matrice est reportée dans le tableau 3.5. Les colonnes de cette

$\tau(A, B, C)$	1	$A$	$B$	$C$	$AB$	$AC$	$BC$	$ABC$
$\tau(1, 1, -1)$	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
$\tau(1, -1, 1)$	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
$\tau(-1, 1, 1)$	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
$\tau(-1, -1, -1)$	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_A$	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_C$	$\mathbf{x}_{AB}$	$\mathbf{x}_{AC}$	$\mathbf{x}_{BC}$	$\mathbf{x}_{ABC}$

TAB. 3.5 – Matrice  $X$  pour la fraction 1/2 définie par  $C = -AB$

matrice vérifient

$$\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_{ABC}, \quad \mathbf{x}_A = -\mathbf{x}_{BC}, \quad \mathbf{x}_B = -\mathbf{x}_{AC}, \quad \mathbf{x}_C = -\mathbf{x}_{AB}.$$

Elles peuvent donc être groupées en paires de colonnes colinéaires. Comme précédemment, les colonnes non colinéaires sont orthogonales et la fraction permet d'obtenir des estimations non corrélées de variance  $\sigma^2/4$  des combinaisons linéaires suivantes

$$\gamma(\mathbf{1}) = e(\mathbf{1}) - e(ABC), \quad \gamma(A) = e(A) - e(BC), \quad \gamma(B) = e(B) - e(AC), \quad \gamma(C) = e(C) - e(AB).$$

Ces combinaisons sont par définition les *fonctions estimables de base* pour cette fraction. Les effets confondus restent les mêmes que pour l'autre fraction, mais les f.e.b sont les différences au lieu des sommes. Cette modification peut parfois être mise à profit pour choisir entre les deux fractions. Mais en général il n'y pas de raison de sélectionner plus spécialement l'une de ces deux fractions aux propriétés très similaires et le choix peut être fait au hasard. Pour simplifier, l'étude des propriétés de la fraction peut être faite sur la fraction dont les *f.e.b* sont des sommes qui est appelée *fraction principale*.

### 3.2.7 Fraction 1/4 d'un 2<sup>6</sup>

Pour mieux expliciter les règles donnant les effets confondus, nous considérons maintenant un plan comportant 2<sup>4</sup> unités expérimentales et 6 facteurs à 2 niveaux. Il s'agit donc d'une fraction 1/4 d'un 2<sup>6</sup>, aussi désignée par fraction 2<sup>6-2</sup>. Les 4 facteurs de base permettant de repérer les unités sont notés  $A, B, C, D$ . Les deux autres facteurs notés  $E, F$  sont définis en notation multiplicative par les égalités

$$E = ABC, \quad F = -BCD, \quad (3.18)$$

appelées *relations de définition génératrices du plan*. Sur ce plan (tableau 3.6), on a donc  $ABCE = E^2 = 1$ ,  $-BCDF = F^2 = 1$  et par suite  $-ABCEBCDF = -AB^2C^2DEF = -ADEF = 1$ . Les relations (3.18) induisent donc les égalités suivantes, souvent appelées *relations de définition* de la fraction :

$$1 = ABCE = -BCDF = -ADEF. \quad (3.19)$$

Les produits de facteur  $1, ABCE, BCDF, ADEF$ , trouvés ainsi égaux à 1 au signe près, sont appelés *produits, mots ou contrastes de définition* de la fraction. On abrège souvent *mot de définition* en *mot* si le contexte est clair. Les 2 mots  $ABCE, BCDF$ , immédiatement déduits des relations génératrices et à partir desquels on forme les autres mots en effectuant tous les produits possibles, sont appelés *mots générateurs* ou *générateurs*.

On verra que plusieurs propriétés importantes du plan dépendent des nombres de facteurs apparaissant dans les mots de définition. Ces nombres sont appelés leurs *longueur*, ou *poids*. Ici, il y a donc un produit  $1$  de longueur 0, et trois produits  $ABCE, BCDF, ADEF$  de longueur 4. Ce *profil de longueur des mots* est noté  $(0_14_3)$  [Brownlee et al, 1948].

Le terme  $1$ , toujours présent, est généralement ignoré quand on fait référence aux contrastes, mots ou produits de définition et le  $0_1$  peut donc être omis dans le profil de longueur des mots.

La première ligne du tableau 3.7 redonne les relations de définition. En les multipliant à tour de rôle par chacun des produits entre les 4 facteurs de base, on obtient les autres 15 ensembles de produits égaux figurant sur les lignes suivantes du tableau. Le même raisonnement que dans le cas de la fraction 1/2 du plan 2<sup>3</sup> conduit à un modèle  $E(\mathbf{y}) = X\mathbf{e}$  où  $\mathbf{y}$  est le vecteur des 16 observations,  $\mathbf{e}$  le vecteur des 64 effets factoriels et  $X$  la matrice  $16 \times 64$  dont les colonnes sont tous les produits possibles entre les 6 facteurs. Si  $P$  désigne un de ces produits, on note  $\mathbf{x}_P$  la colonne correspondante (comme au paragraphe 3.2.3), de sorte que le modèle peut s'écrire

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}) &= \sum_P \mathbf{x}_P e(P) \\ &= \mathbf{x}_1 e(1) + \mathbf{x}_A e(A) + \dots + \mathbf{x}_{AB} e(AB) + \dots + \mathbf{x}_{ABCDEF} e(ABCDEF). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les égalités du tableau 3.7 permettent d'écrire des égalités analogues entre les colonnes

$E = A + B + C \pmod{2}$ $F = 1 + B + C + D \pmod{2}$						$E = ABC$ $F = -BCD$					
$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	-1
0	0	0	1	0	1	1	1	1	-1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	-1	1	-1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	-1	-1	-1	-1
0	1	0	0	1	0	1	-1	1	1	-1	1
0	1	0	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	-1
0	1	1	0	0	1	1	-1	-1	1	1	-1
0	1	1	1	0	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	0	0	0	1	0	-1	1	1	1	-1	-1
1	0	0	1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1
1	0	1	0	0	1	-1	1	-1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	0	0	0	1	-1	-1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	0	1	0	-1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	1

notation additive
notation multiplicative

TAB. 3.6 – Fraction 1/4 d'un  $2^6$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &= ABCE = -BCDF = -ADEF \\
D &= ABCDE = -BCF = -AEF \\
C &= ABE = -BDF = -ACDEF \\
CD &= ABDE = -BF = -ACEF \\
B &= ACE = -CDF = -ABDEF \\
BD &= ACDE = -CF = -ABEF \\
BC &= AE = -DF = -ABCDEF \\
BCD &= ADE = -F = -ABCEF \\
A &= BCE = -ABCDF = -DEF \\
AD &= BCDE = -ABCF = -EF \\
AC &= BE = -ABDF = -CDEF \\
ACD &= BDE = -ABF = -CEF \\
AB &= CE = -ACDF = -BDEF \\
ABD &= CDE = -ACF = -BEF \\
ABC &= E = -ADF = -BCDEF \\
ABCD &= DE = -AF = -BCEF
\end{aligned}$$

TAB. 3.7 – Egalités entre produits de facteurs dans une fraction 1/4 d'un  $2^6$

de  $X$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_{ABCE} = -\mathbf{x}_{BCDF} = -\mathbf{x}_{ADEF}, \\
\mathbf{x}_D &= \mathbf{x}_{ABCDE} = -\mathbf{x}_{BCF} = -\mathbf{x}_{AEF}, \\
&\dots \\
\mathbf{x}_{ABCD} &= \mathbf{x}_{DE} = -\mathbf{x}_{AF} = -\mathbf{x}_{BCEF}.
\end{aligned}$$

Les colonnes  $\mathbf{x}_P$  figurant dans une même ligne sont donc colinéaires. En remplaçant les trois dernières par leur expression en fonction de la première, on obtient une forme du modèle semblable à (3.12) :

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{y}) &= \left( e(\mathbf{1}) + e(ABCE) - e(BCDF) - e(ADEF) \right) \mathbf{x}_1 \\
&+ \left( e(D) + e(ABCDE) - e(BCF) - e(AEF) \right) \mathbf{x}_D \\
&+ \dots \\
&+ \left( e(ABCD) + e(DE) - e(AF) - e(BCEF) \right) \mathbf{x}_{ABCD}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Les 4 effets factoriels figurant dans chaque expression entre parenthèses sont *confondus*. La seule combinaison linéaire estimable de ces effets est celle qui apparait entre parenthèses, que l'on déduit immédiatement de la ligne correspondante du tableau 3.7. Comme au paragraphe 3.2.3, ces combinaisons linéaires estimables sont appelées fonctions estimables de base (f.e.b) et notées  $\gamma(\mathbf{1})$ ,  $\gamma(D)$ ,  $\dots$ ,  $\gamma(ABCD)$  :

$$\begin{aligned}
\gamma(\mathbf{1}) &= e(\mathbf{1}) + e(ABCE) - e(BCDF) - e(ADEF), \\
\gamma(D) &= e(D) + e(ABCDE) - e(BCF) - e(AEF), \\
&\dots \\
\gamma(ABCD) &= e(ABCD) + e(DE) - e(AF) - e(BCEF).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Préciser les produits (mots ou contrastes) de définition revient donc à donner les *effets confondus avec la moyenne* générale et les coefficients de ces effets dans la f.e.b  $\gamma(\mathbf{1})$  se déduisent immédiatement des relations de définitions.

Le résultat général déjà cité [Kobilinsky et Monod, 1995] permet d'affirmer que les 16 colonnes  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_D$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{x}_{ABCD}$  retenues dans le modèle (3.21) sont orthogonales. De même qu'au paragraphe 3.2.4, les estimateurs des moindres carrés des f.e.b sont donc les produits scalaires :

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}(\mathbf{1}) &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 \rangle / 16 = \sum y(A,B,C,D) / 16 \\
\hat{\gamma}(D) &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_D \rangle / 16 = \sum D y(A,B,C,D) / 16 \\
&\dots \\
\hat{\gamma}(ABCD) &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_{ABCD} \rangle / 16 = \sum ABCD y(A,B,C,D) / 16.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

La notation  $y(A,B,C,D)$  fait ici référence à l'observation effectuée sur l'unité repérée par les niveaux  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  des quatres facteurs de base. Les sommations sont sur l'ensemble

des 16 unités. Noter qu'une somme telle que  $\sum D y(A,B,C,D)/16$  est la demi-différence entre les 8 observations pour lesquelles  $D = 1$  et les 8 pour lesquelles  $D = -1$ .

Comme indiqué au paragraphe 3.2.4, on peut alléger les notations en écrivant les produits scalaires  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{1} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{y}, D \rangle$ ,  $\dots$ ,  $\langle \mathbf{y}, ABCD \rangle$ .

Si la matrice de variance de  $\mathbf{y}$  est de la forme (3.17), les estimateurs dans (3.23) sont non corrélés de même variance  $\sigma^2/16$ .

Pour interpréter les résultats, on fait l'hypothèse que les interactions de trois facteurs ou plus sont négligeables. Si on les supprime alors dans les combinaisons linéaires (3.22) d'effets confondus, on obtient les fonctions estimables de base figurant dans le tableau 3.8.

$$\begin{array}{ll}
 \gamma(\mathbf{1}) = & e(\mathbf{1}) \\
 \gamma(D) = & e(D) \\
 \gamma(C) = & e(C) \\
 \gamma(CD) = & e(CD) - e(BF) \\
 \gamma(B) = & e(B) \\
 \gamma(BD) = & e(BD) - e(CF) \\
 \gamma(BC) = & e(BC) + e(AE) - e(DF) \\
 \gamma(BCD) = & -e(F) \\
 \gamma(A) = & e(A) \\
 \gamma(AD) = & e(AD) - e(EF) \\
 \gamma(AC) = & e(AC) + e(BE) \\
 \gamma(ACD) = & 0 \\
 \gamma(AB) = & e(AB) + e(CE) \\
 \gamma(ABD) = & 0 \\
 \gamma(ABC) = & e(E) \\
 \gamma(ABCD) = & e(DE) - e(AF)
 \end{array}$$

TAB. 3.8 – f.e.b en l'absence d'interactions de 3 facteurs ou plus

On remarque que deux des f.e.b,  $\gamma(ACD)$ ,  $\gamma(ABD)$ , se réduisent à 0. Sous l'hypothèse que les interactions de trois facteurs ou plus sont nulles, les estimateurs correspondants  $\hat{\gamma}(ACD) = \langle \mathbf{y}, ACD \rangle / 16$ ,  $\hat{\gamma}(ABD) = \langle \mathbf{y}, ABD \rangle / 16$  sont donc d'espérance nulle.

Ils sont non corrélés de variance  $\sigma^2/16$  si la matrice de variance de  $\mathbf{y}$  est de la forme (3.17). Dans ces conditions

$$\hat{\sigma}^2/16 = \left( \hat{\gamma}^2(ACD) + \hat{\gamma}^2(ABD) \right) / 2$$

est un estimateur sans biais de  $\sigma^2/16$  qui, sous les hypothèses de normalité de  $\mathbf{y}$ , est distribué comme un  $(\sigma^2/16) \chi_2^2/2$ .

Cet estimateur peut être utilisé pour tester la nullité des combinaisons linéaires estimables du tableau 3.8 ou en obtenir des intervalles de confiance :

$$\begin{aligned}
 \gamma(\mathbf{1}) &= \hat{\gamma}(\mathbf{1}) \pm t_\alpha \hat{\sigma} / 4, \\
 \gamma(D) &= \hat{\gamma}(D) \pm t_\alpha \hat{\sigma} / 4, \\
 &\dots \\
 \gamma(ABCD) &= \hat{\gamma}(ABCD) \pm t_\alpha \hat{\sigma} / 4.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Le tableau 3.9 montre cependant que la valeur obtenue pour  $t_\alpha$  avec deux degrés de liberté est excessivement grande. Avec quelques degrés de liberté supplémentaires pour

estimer  $\sigma$ , on s'approcherait beaucoup plus de la valeur minimale (colonne  $\infty$  du tableau). Cette valeur élevée de  $t_\alpha$  conduit à des intervalles de confiance très large et n'autorise que la détection d'effets très importants. Pour interpréter les résultats de ce plan, on est

$d$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	$\infty$
$t_{5\%}$	12.7	4.3	3.2	2.8	2.6	2.4	2.4	2.3	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	1.96
$t_{1\%}$	63.7	9.9	5.8	4.6	4.0	3.7	3.5	3.4	3.2	3.2	2.9	2.8	2.7	2.58
$t_{0.1\%}$	636.6	31.6	12.9	8.6	6.9	6.0	5.4	5.0	4.8	4.6	4.1	3.8	3.6	3.29

TAB. 3.9 – Coefficient  $t_\alpha$  en fonction du nombre  $d$  de ddl de l'erreur

$t_\alpha$  est la valeur telle que  $P(|T| \geq t_\alpha) = \alpha$  où  $T$  suit la distribution du  $t$  de Student avec  $d$  degrés de liberté

donc tenté d'aller au delà de l'examen des intervalles (3.24) en comparant entre elles les estimations de f.e.b. On peut penser que les plus petites en valeur absolue, et pas seulement  $\hat{\gamma}(ACD)$  et  $\hat{\gamma}(ABD)$ , correspondent à des f.e.b nulles et les plus grandes en valeur absolue aux f.e.b non nulles. Partant de cette idée, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour estimer la variance résiduelle  $\sigma^2$  et déterminer les f.e.b non nulles.

### 3.3 Détection des effets actifs dans un plan sans répétition

#### 3.3.1 Le graphique des quantiles demi-normaux

La plus ancienne de ces méthodes est la procédure graphique de Daniel [1959] où l'on examine un *graphique des quantiles demi-normaux* (*Half Normal probability plot*) des estimations de f.e.b données par (3.23).

Ce graphique est construit à partir des valeurs absolues  $X_1 = |\hat{\gamma}(D)|, \dots, X_{15} = |\hat{\gamma}(ABCD)|$  des 15 estimations de f.e.b. On ordonne ces valeurs en ordre croissant, obtenant ainsi les statistiques d'ordre  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(15)}$  associées, qui sont les ordonnées du graphique. Les abscisses correspondantes  $Z_1, \dots, Z_{15}$  sont calculées par la formule

$$Z_i = F^{-1} \left( \frac{i - 0.5}{15} \right)$$

où  $F$  est la fonction de répartition de la valeur absolue  $|X|$  d'une variable  $X$  de loi normale centrée réduite.  $Z_i$  est donc le quantile  $(i - 0.5)/15$  de cette loi et  $X_{(i)}$  peut être assimilé au quantile correspondant de la loi empirique définie par les valeurs absolues  $X_1, \dots, X_{15}$  des f.e.b.<sup>1</sup> La fonction  $F^{-1}$  se déduit immédiatement de l'inverse  $\Phi^{-1}$  de la fonction de répartition  $\Phi$  de la loi normale centrée réduite :

$$F^{-1}(p) = \Phi^{-1} \left( \frac{p + 1}{2} \right),$$

et  $\Phi^{-1}$  peut être approchée à 0.0005 près par un développement limité ad hoc [Abramowitz et al., 1970, 26.2.23].

1. Daniel met en ordonnée les  $Z_i$  et en abscisse les  $X_{(i)}$ .

Sous l'hypothèse de normalité et si tous les effets sont nuls, les 15 f.e.b estimées forment un 15 échantillon d'une loi normale centrée de variance  $\sigma^2/16$ . L'ordonnée  $X_{(i)}$  du point  $(Z_i, X_{(i)})$  a alors approximativement  $\sigma Z_i/4$  pour espérance [David, 1981] :

$$E(X_{(i)}) \approx \frac{\sigma}{4} Z_i,$$

et les points du graphique tendent à s'aligner sur la droite de pente  $\sigma/4$  passant par l'origine. Cette situation est illustrée par les 3 graphiques 1A, 1B, 1C en haut de la figure 3.2. Ceux-ci ont été obtenus en simulant des données avec des effets tous nuls et un écart-type  $\sigma = 1$ . On y a reporté la droite de pente  $\sigma/4 = 1/4$  passant par l'origine.

Lorsqu'il y a des effets non nuls, il n'y a plus alignement. Mais les points associés aux petits  $|X_i|$  tendent encore à s'aligner à gauche du graphique, tandis que les f.e.b où apparaissent des effets non nuls se détache de cet alignement vers le haut, ce qui permet de les détecter. Cette situation est illustrée par les 3 graphiques de la deuxième rangée (figure 3.2, 2A, 2B, 2C) qui ont été obtenus en simulant des données avec le même écart-type  $\sigma = 1$  et 4 effets différents de 0 :

$$e(A) = 9\frac{\sigma}{4}, \quad e(B) = -10\frac{\sigma}{4}, \quad e(C) = -5\frac{\sigma}{4}, \quad e(AB) = 4\frac{\sigma}{4}. \quad (3.25)$$

A titre indicatif, on a reporté dans ces graphiques la droite de pente  $\sigma/4 = 1/4$  passant par l'origine.

Une fois détectées les f.e.b significativement différentes de 0, on les élimine et on refait un nouveau graphique des quantiles. Si les points de ce nouveau graphique apparaissent raisonnablement alignés sur une droite, la pente de cette droite fournit une estimation de l'écart-type  $\sigma/4$ . Si certains points s'écartent à nouveau nettement vers le haut, on peut considérer les f.e.b associées comme non nulles et itérer la procédure. Si au contraire, certains points s'écartent vers le bas, cela peut être le signe qu'on a considéré trop de f.e.b comme non nulles.

Pour concrétiser, on a imaginé un scénario pour chacun des trois jeux de données simulées. Ainsi pour 2A, il a paru naturel de considérer que les points associés à des f.e.b non nulles étaient les 4 premiers  $B, A, C, AB$ . Pour 2B, on a rajouté le 5ème, alors que dans 2C on a retenu que les deux premiers  $A$  et  $B$ .

Les graphiques 3A, 3B, 3C sont les graphiques des quantiles demi-normaux obtenus en écartant ces 4, 5 et 2 points respectivement. A titre de comparaison, on a aussi fait figurer les graphiques des quantiles obtenus en éliminant dans tous les cas 4 points (4A, 4B, 4C).

Dans 3A, les points obtenus sont raisonnablement alignés. La droite reportée est la droite passant par l'origine qui s'ajuste le mieux aux 11 points au sens des moindres carrés. Sa pente 0.265 conduit à l'estimation  $\hat{\sigma} = 4 \times 0.265 = 1.06$ .

Dans 3B, l'alignement semble également bon. L'ajustement d'une droite passant par l'origine aux 10 points donne la pente 0.159. Une meilleure estimation de l'écart-type  $4 \times 0.235$  est obtenue en réintégrant le 5ème point éliminé (graphique 4B), mais l'examen visuel incite nettement à le supprimer.

Enfin l'examen de 3C peut amener à conclure que les points  $AB$  et  $C$  correspondent aussi à des f.e.b non nulles. Leur élimination conduit au graphique 4C ou la pente estimée est 0.247.

### 3.3.2 Tests complétant le graphique des quantiles

Pour déterminer si l'écart vers le haut est significatif, la procédure graphique peut être complétée par des tests. Les tests initialement proposés par Daniel sont basés sur la distribution, obtenue par simulation sous l'hypothèse de nullité de tous les effets, des plus grands rapports  $t_{15} = X_{(15)}/X_{(11)}$ ,  $t_{14} = X_{(14)}/X_{(11)}$ ,  $t_{13} = X_{(13)}/X_{(11)}$ . La f.e.b associée à un tel rapport  $t_k$  est déclarée significativement différente de 0 si  $t_k > a_k$  où la constante  $a_k$  est choisie pour avoir un risque  $\alpha$  de déclarer la f.e.b différente de 0 sous l'hypothèse de nullité de tous les effets.

★ Le choix de  $X_{11}$  comme dénominateur des statistiques de test vient de ce que cette statistique d'ordre est celle qui approxime le mieux l'écart-type  $\sigma/4$  lorsque tous les effets sont nuls. Plus généralement lorsqu'il y a  $n$  f.e.b, les statistiques proposées par Daniel pour tester que les plus grands effets sont significatifs sont  $t_n = X_{(n)}/X_{(k)}$ ,  $t_{n-1} = X_{(n-1)}/X_{(k)}$ , etc ... où  $k$  est la partie entière de  $0.683n + 1$ . Pour une loi normale centrée  $X$ , le quantile 0.683 de la valeur absolue  $|X|$  est précisément l'écart-type. Si tous les effets sont nuls, la statistique  $X_{(k)}$ , proche du quantile empirique 0.683, est donc un bon estimateur de l'écart-type.

De nombreuses modifications ou variantes à la méthode de test de Daniel ont été proposées. La majeure partie de ces variantes cherchent d'abord une estimation  $s$  robuste de l'écart-type  $\sigma/4$ , puis utilise pour tester la nullité d'une f.e.b la statistique  $X_i/s$  associée. Haaland et Connel [1995] donnent une présentation unifiée de ce type de variantes et comparent leurs efficacités respectives.

Box et Meyer [1986] suggèrent une méthode bayésienne de détection des effets actifs. La distribution a priori des effets actifs est supposée normale centrée de variance  $\gamma^2\sigma^2$ . C'est donc le facteur  $\gamma^2$  d'inflation de la variance qui permet de distinguer a priori un effet actif d'un effet non actif. L'a priori précise aussi la proportion  $\alpha$  des effets actifs. Les données permettent de calculer, pour chaque effet, la probabilité a posteriori qu'il soit actif. L'interprétation est faite à partir de ces probabilités, plutôt qu'à partir des estimations initiales des effets.

Lorsque les f.e.b trouvées significativement différentes de 0 par la procédure graphique ou par une autre procédure sont combinaisons linéaires de plusieurs effets, l'analyse peut souvent se poursuivre de la façon illustrée au paragraphe 3.2.5. L'approche bayésienne exposée brièvement dans le paragraphe suivant peut aussi faciliter cette interprétation.

### 3.3.3 Détection Bayésienne des facteurs actifs

Partant de la constatation que, dans bien des cas, il n'y a qu'une petite proportion de facteurs actifs, Box et Meyer [1993] propose une approche bayésienne (différente de celle décrite au paragraphe précédent) pour détecter ces facteurs actifs.

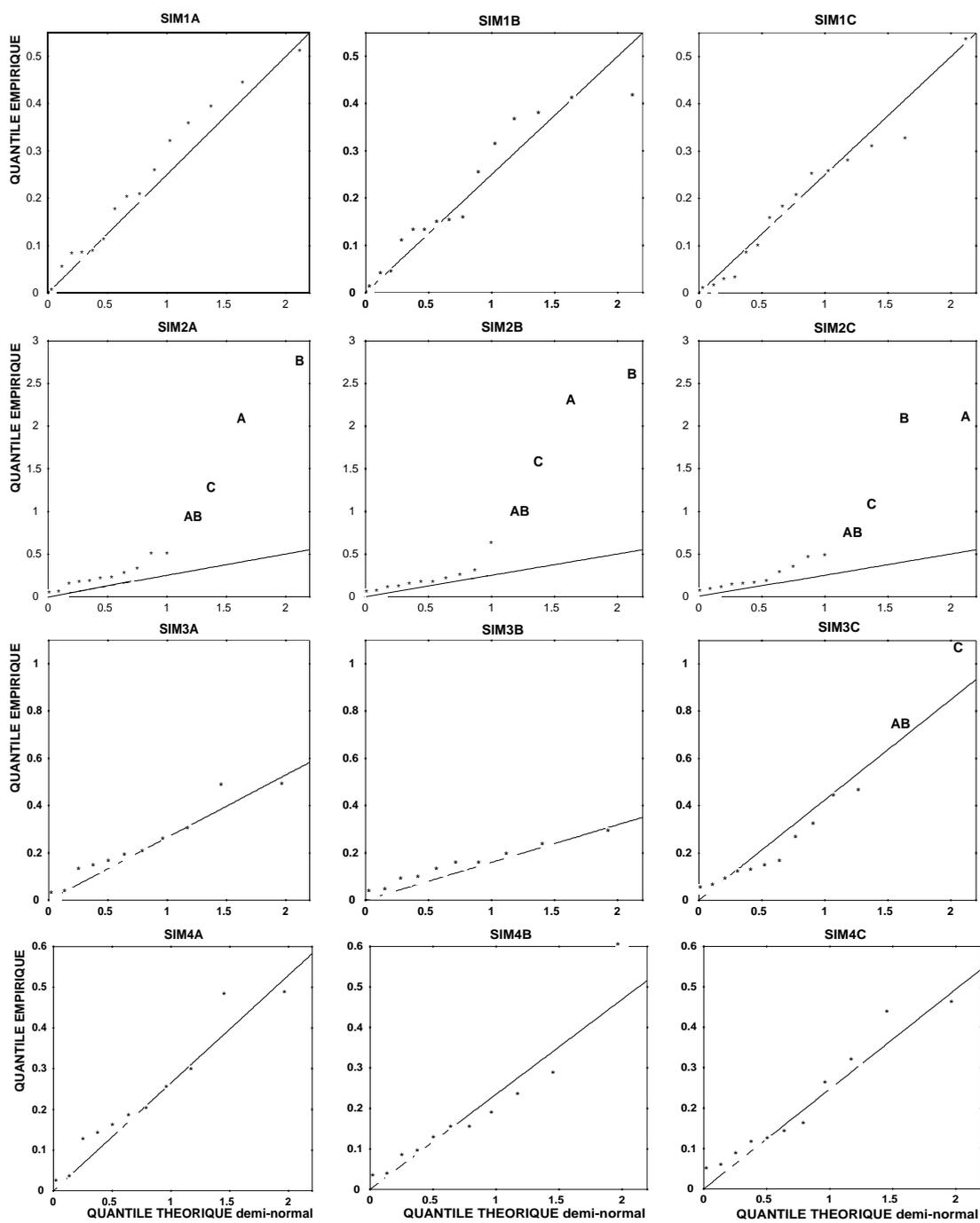


FIG. 3.2 – Graphiques des quantiles demi-normaux avec les effets (3.25)

Ils associent un modèle  $M_i$  de la forme  $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(X_i\boldsymbol{\beta}_i, \sigma^2)$  à chaque sous-ensemble  $\mathcal{E}_i$  de facteurs. Les paramètres de  $\boldsymbol{\beta}_i$  sont la moyenne générale, les effets principaux et interactions impliquant les facteurs de  $\mathcal{E}_i$  qui sont donc les facteurs actifs sous le modèle  $M_i$ . L'a priori sur les paramètres de  $\boldsymbol{\beta}_i$  est qu'ils suivent des lois normales indépendantes de moyenne 0 et variance  $\gamma^2\sigma^2$ , à l'exception de la moyenne générale dont la loi a priori est supposée uniforme de même que celle de  $\log(\sigma)$ .

Il est naturellement possible de supposer nulles les interactions impliquant beaucoup de facteurs (ou de réduire leur paramètre  $\gamma^2$  d'inflation de la variance), mais la tendance de Box et Meyer est plutôt de faire un minimum d'hypothèses sur la façon dont les quelques effets actifs peuvent jouer.

La probabilité a priori du modèle  $M_i$  est supposée être une fonction décroissante du nombre  $f_i = |\mathcal{E}_i|$  de facteurs actifs. La fonction plus précisément proposée est

$$p(M_i) = \pi^{f_i}(1 - \pi)^{h-f_i} = (1 - \pi)^h \left( \frac{\pi}{1 - \pi} \right)^{f_i}$$

où  $h$  est le nombre total de facteurs et  $\pi$  est choisi entre 0 et 0.5 et d'autant plus petit que la proportion de facteurs actifs est supposée plus faible.

A partir de ces probabilités a priori et des observations, on obtient la probabilité a posteriori  $p(M_i|\mathbf{y})$  de chaque modèle, d'où l'on déduit pour chaque facteur  $j$  la probabilité a posteriori  $P_j$  qu'il soit actif. Celle ci est la somme des probabilités a posteriori des modèles distincts contenant ce facteur :

$$P_j = \sum_{i|j \in \mathcal{E}_i} p(M_i|\mathbf{y}) .$$

Une fois identifié le modèle  $M_i$ , on peut estimer  $\boldsymbol{\beta}_i$  par une méthode usuelle si  $X_i^t X_i$  est inversible, ou poursuivre l'expérimentation avec les seuls facteurs actifs pour préciser le modèle.

Il faut noter que cette approche peut être utilisée aussi bien pour des fractions régulières que pour des plans non réguliers, tels que les fractions de Plackett et Burman ayant un nombre d'unités qui n'est pas puissance de 2 (cf § 3.5.3). Dans ce dernier cas, la complexité des confusions d'effets, déterminables par la méthode du § 3.10.5, interdit toute interprétation prenant en compte les interactions qui ne s'appuierait pas sur une procédure automatisée de ce type.

### 3.3.4 Exemple de la revivification des bactéries

Pour mesurer la concentration dans un aliment des individus vivants d'une espèce bactérienne donnée, une technique classique consiste à les cultiver sur une boîte de Pétri avec un milieu approprié et à compter ensuite le nombre de colonies formées. Si le prélèvement est suffisamment dilué avant ensemencement de la boîte, chaque colonie provient d'une seule bactérie. Le nombre de ces colonies, aussi appelé nombre *d'unités formant colonie (UFC)*, permet alors d'estimer la concentration recherchée.

Cette mesure suppose que les bactéries vivantes se multiplient comme dans une culture ordinaire. Or les traitements thermiques ou autres, appliqués à l'aliment, peuvent stresser les bactéries sans les tuer. Les bactéries stressées sont capables de restaurer leur activité dans l'aliment et peuvent être à l'origine d'altérations commerciales ou d'intoxications alimentaires. Mais le stress peut empêcher ou retarder la croissance sur boîte de Pétri, et interdire de ce fait la détection et le dénombrement par les méthodes usuelles.

Pour pallier à cet inconvénient, une méthode consiste à *revivifier* les bactéries, c'est-à-dire à leur restituer leur faculté de multiplication, en les incubant dans un milieu ad hoc avant culture sur boîte de Pétri.

Pour déterminer les conditions optimales de revivification, dans le cas de la bactérie *Escherichia coli*, on a réalisé le plan  $2^{9-4}$  de résolution 4 défini au tableau 3.11, avec les facteurs précisés dans le tableau 3.10 [Billaux, 1995].

	FACTEURS	NIVEAUX		FACTEURS	NIVEAUX
A	Durée revivification	1 : 120 min à 25°C -1 : 30 min à 25°C	F	Magnésium	1 : Présence -1 : absence
B	Diluant	1 : EPT (*) -1 : TS	G	Pyruvate - diluant	1 : Présence -1 : absence
C	Phosphate	1 : Présence -1 : absence	H	Catalase	1 : Présence -1 : absence
D	Matrice alimentaire	1 : Bouillon -1 : Viande hachée	I	Pyruvate - milieu	1 : Présence -1 : absence
E	Stress	1 : 2 heures à 2°C -1 : 24 heures à 2°C			

TAB. 3.10 – *Revivification de bactéries : les facteurs et leurs niveaux*

(\*) EPT: Eau Peptonée Tamponnée, TS: Tryptone Sel

facteurs définis	$F = -ABCD, G = BCE, H = ABE, I = -ACDE$
mots de définition	$1 = -ABCDF = BCEG = -ADEF G$ $= ABEH = -CDEFH = ACGH = -BDFGH$ $= -ACDEI = BEFI = -ABDGI = CFGI$ $= -BCDHI = AFHI = -DEGHI = ABCEFGHI$
profil	$4_6 \ 5_8 \ 8_1$
effets non confondus	$A, B, C, D, E, F, G, H, I$ $DA, DB, DC, DE, DF, DG, DH, DI$
effets confondus (f.e.b de plusieurs termes)	$(AB + EH), (AC + GH), (BC + EG), (GI + CF), (EI + BF),$ $(HI + AF), (AE + BH), (BE + AH + FI + CG), (CE + BG),$ $(CH + AG), (FG + CI), (AI + FH), (BI + EF)$
ddl erreur = 1	

TAB. 3.11 – *Revivification : définition et propriété de la fraction  $2^{9-4}$*

L'aliment, bouillon ou viande hachée (facteur *D*), est contaminé avec la bactérie, puis on applique un stress par le froid plus ou moins long (*E*). La revivification s'effectue par incubation à 25°C pendant 30 ou 120 minutes (*A*) dans un diluant qui est soit de l'eau peptonée tamponnée, soit du tryptone sel (*B*), auquel on ajoute différents adjuvants,

connus pour améliorer dans certains cas le recouvrement de bactéries stressées ( $C$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ). Du pyruvate peut également être rajouté au milieu de culture de la boîte de Pétri ( $I$ ).

Le plan et les résultats pour l'une des variables observées apparaissent à gauche du tableau 3.12. Cette variable  $Y$  est le logarithme à base 10 du nombre d'UFC après croissance sur le milieu VRBL (Violet Red Bile Lactose agar) qui favorise la croissance d'*Escherichia coli*.

En plus de la définition de la fraction, le tableau 3.11 donne les mots de définition, le profil des longueurs des mots, puis les confusions d'effets dans un modèle incluant les effets principaux et interactions de deux facteurs.

Il apparaît qu'il n'y a, si on suppose nulles les interactions de 3 facteurs ou plus, que 1 degré de liberté pour estimer la variance résiduelle. Il est donc indispensable, pour analyser les données, d'utiliser les méthodes de détection étudiées ou mentionnées dans ce paragraphe 3.3.

### Analyse.

Les 31 effets estimés sont reportés à droite du tableau 3.12 (colonne  $\hat{\gamma}$ ) dans l'ordre croissant de leurs valeurs absolues (colonne  $X_{(i)}$ ). En regard du  $i$  ème effet, on a indiqué la proportion  $(i - 0.5)/31$  d'effets de valeur absolue plus petite, puis le quantile associé  $Q_i$  d'une demi loi normale centrée réduite.

La figure 3.3 donne le graphique de Daniel correspondant, avec les quantiles théoriques  $Q_i$  en abscisse et les quantiles empiriques  $X_{(i)}$  en ordonnée. Chaque effet est représenté par une lettre ou un chiffre qui permet de le retrouver dans le tableau 3.12. Les effets  $A$ ,  $DE$ ,  $D$  (points 2,  $q$ , 5) s'écartent vers le haut de façon assez nette. L'écart est moins net pour les effets  $AD$  et  $AH + BE + CG + FI$  (points  $c$ ,  $g$ ).

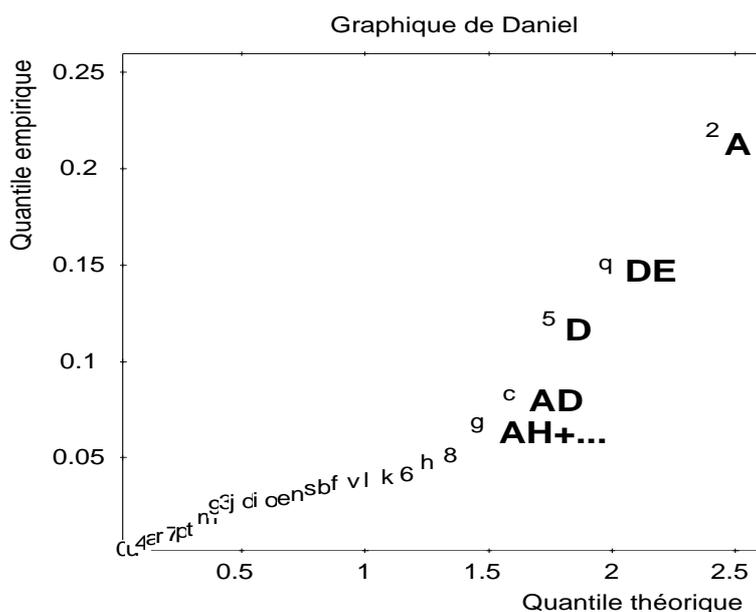


FIG. 3.3 – *Revivification*: graphique de Daniel

Plan, observation										f.e.b estimées, quantiles						
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>Y</i>	<i>i</i>	f.e.b $\gamma$	$\hat{\gamma}$	$X_{(i)}$	$\frac{i-0.5}{31}$	$Q_i$	
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7.02	1	<i>I</i>	-0.002	0.002	0.016	0.020	
1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	6.78	2	<i>D.I</i>	0.002	0.002	0.048	0.061	
-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	7.13	3	<i>C</i>	-0.006	0.006	0.081	0.101	
1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	6.73	4	<i>a</i>	<i>A.B + E.H</i>	-0.007	0.008	0.113	0.142
-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	7.07	5	<i>r</i>	<i>D.F</i>	-0.009	0.009	0.145	0.183
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	6.80	6	7	<i>F</i>	-0.010	0.010	0.177	0.224
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	7.18	7	<i>p</i>	<i>C.I + F.G</i>	-0.012	0.012	0.210	0.265
1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	6.88	8	<i>t</i>	<i>D.H</i>	-0.012	0.013	0.242	0.308
-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	7.36	9	<i>m</i>	<i>B.I + E.F</i>	0.019	0.019	0.274	0.350
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	6.86	10	9	<i>H</i>	-0.024	0.024	0.306	0.394
-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	7.43	11	3	<i>B</i>	0.026	0.026	0.339	0.438
1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	6.86	12	<i>j</i>	<i>B.D</i>	0.026	0.026	0.371	0.483
-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	7.13	13	<i>d</i>	<i>A.E + B.H</i>	0.027	0.027	0.403	0.529
1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	6.04	14	<i>i</i>	<i>B.C + E.G</i>	0.028	0.028	0.435	0.576
-1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	7.47	15	<i>o</i>	<i>C.F + G.I</i>	-0.027	0.028	0.468	0.624
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	6.90	16	<i>e</i>	<i>A.F + H.I</i>	-0.029	0.029	0.500	0.674
-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	7.26	17	<i>n</i>	<i>C.D</i>	-0.031	0.031	0.532	0.726
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	7.07	18	<i>s</i>	<i>D.G</i>	-0.034	0.034	0.565	0.780
-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	7.29	19	<i>b</i>	<i>A.C + G.H</i>	-0.034	0.034	0.597	0.836
1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	6.99	20	<i>f</i>	<i>A.G + C.H</i>	-0.036	0.036	0.629	0.895
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	7.29	21	<i>v</i>	<i>B.D.E</i>	-0.037	0.038	0.661	0.957
1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	7.18	22	<i>l</i>	<i>B.G + C.E</i>	0.038	0.038	0.694	1.023
-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	7.32	23	<i>k</i>	<i>B.F + E.I</i>	0.039	0.039	0.726	1.093
1	1	1	-1	1	1	1	1	1	6.95	24	6	<i>E</i>	-0.041	0.041	0.758	1.170
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	6.81	25	<i>h</i>	<i>A.I + F.H</i>	-0.047	0.047	0.790	1.255
1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	6.39	26	8	<i>G</i>	-0.051	0.051	0.823	1.349
-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	6.72	27	<i>g</i>	<i>A.H + B.E</i>	-0.069	0.069	0.855	1.457
1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	6.38			<i>+C.G + F.I</i>				
-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	7.04	28	<i>c</i>	<i>A.D</i>	-0.083	0.083	0.887	1.586
1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	6.47	29	5	<i>D</i>	-0.122	0.122	0.919	1.747
-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	6.98	30	<i>q</i>	<i>D.E</i>	-0.151	0.151	0.952	1.974
1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	6.20	31	2	<i>A</i>	-0.219	0.219	0.984	2.406

TAB. 3.12 – *Revivification : plan, observation, f.e.b et quantiles*

Pour aller plus loin, on a utilisé sur ces données la procédure de détection des effets actifs de Lenth [1989], puis la méthode Bayésienne décrite au paragraphe 3.3.3.

Dans la *méthode de Lenth*, les effets considérés comme différents de 0 avec un risque 5% sont ceux qui sont supérieurs en valeur absolue à 0.092, c'est-à-dire les trois derniers  $A$ ,  $D.E$ ,  $D$ .

★ Dans cette méthode de Lenth, l'écart-type des f.e.b nulles (non actives) est estimé en deux temps. La première estimation est  $s_0 = 1.5$  médiane $\{X_1, \dots, X_p\}$  où  $X_1, \dots, X_p$  sont les valeurs absolues des f.e.b estimées. Le coefficient 1.5 est sensiblement celui par lequel il faut multiplier la médiane de la valeur absolue d'une variable  $X$  normale centrée d'écart-type  $\sigma$  pour obtenir  $\sigma$ :  $\sigma \approx 1.5$  médiane $(|X|)$ . Cette estimation  $s_0$  de l'écart-type est donc naturelle si les f.e.b sont toutes nulles, car les  $X_i$  sont alors un  $p$ -échantillon d'une même loi normale centrée. Mais elle n'est pas acceptable lorsqu'il y a des f.e.b non nulles.

Pour obtenir une estimation acceptable lorsqu'il y a des f.e.b non nulles, on tronque les données en supprimant les  $X_i$  supérieurs à  $2.5s_0$ , dans l'espoir que les f.e.b non nulles sont ainsi éliminées. L'estimation finale  $s$  de l'écart-type est prise égale à 1.5 fois la médiane des  $X_i$  restants:  $s = 1.5$  médiane $\{X_i | X_i < 2.5s_0\}$ .

Sont alors considérées comme différentes de 0 les f.e.b telles que  $X_i > t_\alpha s$  où  $t_\alpha$  est la valeur qui a la probabilité  $\alpha$  d'être dépassée par la valeur absolue d'un  $t$  de student à  $p/3$  degrés de liberté. Lenth a déterminé le nombre de degrés de liberté  $p/3$  par des simulations. Pour  $\alpha$ , il est suggéré de prendre soit le risque 5%, soit un risque plus faible calculé pour que le risque global soit égal à 5%, à savoir  $\alpha = 1 - 0.95^{1/p}$ .

Dans cet exemple, la médiane des valeurs absolues est  $X_{(16)} = 0.029$  et le premier écart-type estimé par la méthode de Lenth est donc  $s_0 = 0.043 = 1.5 \times 0.029$ . Les f.e.b supérieures à  $2.5 s_0 = 0.108$  en valeur absolue sont les trois dernières dans la partie droite du tableau 3.12. Si on les supprime, on trouve 0.028 comme nouvelle médiane et  $s = 0.0415$  comme nouvel écart-type. Pour déterminer le seuil  $t_\alpha$ , on prend alors  $10 \approx 31/3$  comme degrés de liberté. Au risque 5%, on a  $t_\alpha = 2.23$  et ceci conduit à déclarer une f.e.b non nulle si elle est supérieure à  $0.092 = 2.23 \times 0.0415$ .

Si on voulait contrôler le risque global, on prendrait  $\alpha = 1 - 0.95^{1/31} = 0.00165$  soit  $t_\alpha = 4.26$ , ce qui conduirait à déclarer différent de 0 le seul effet  $A$ , durée de revivification, supérieur en valeur absolue à  $0.176 = 4.26 \times 0.0415$ . Mais une telle prudence conduirait à écarter des études ultérieures des facteurs très vraisemblablement actifs tels que  $D$  et  $E$  (matrice alimentaire et stress). Les expériences ultérieures ont en fait montré l'importance de ces facteurs.

On notera que cette approche de Lenth s'appuie sur l'hypothèse que les effets non nuls sont rares et devient peu fiable si il y a beaucoup d'effets actifs.

La *méthode de Box et Meyer* a été utilisée avec 6 jeux de valeurs pour  $\pi$  et  $\gamma$  (tableau 3.13). Dans tous les cas, l'analyse suggère fortement qu'il y a trois facteurs actifs  $A$ ,  $D$  et  $E$ .

★ Box et Meyer suggère de retenir la valeur de  $\gamma$  qui minimise la probabilité a posteriori du modèle réduit à une constante (indiqué par une absence de facteur dans le tableau 3.13). Ils ont montré que cette valeur était aussi la plus probable a posteriori si  $\gamma$  était supposé a priori localement uniformément distribué. Dans cet exemple, le calcul mené en faisant varier  $\gamma$  de 0.1 à 10 avec  $\pi = 0.25$  montre que la probabilité a posteriori du modèle réduit à la constante est minimal lorsque  $\gamma = 0.7$ . Cette valeur assez faible de  $\gamma$  peut s'expliquer par le fait que les effets où apparaissent  $D$  et  $E$  ne sont pas d'un ordre de grandeur très supérieurs aux autres effets considérés comme non différents de 0 et utilisés pour estimer la variance d'erreur.

Plus la valeur de  $\pi$  est petite, plus la probabilité a priori des modèles de taille réduite est grande. Il n'est donc pas surprenant que pour  $\pi = 0.20$  et  $\gamma = 3$ , ce soit le modèle réduit au seul facteur  $A$  qui

Probabilités a posteriori des modèles, en ordre décroissant											
$\pi = 0.25$ $\gamma = 0.7$		$\pi = 0.25$ $\gamma = 1.5$		$\pi = 0.25$ $\gamma = 3$		$\pi = 0.20$ $\gamma = 0.7$		$\pi = 0.20$ $\gamma = 1.5$		$\pi = 0.20$ $\gamma = 3$	
<i>ADE</i>	86.93	<i>ADE</i>	91.06	<i>ADE</i>	50.72	<i>ADE</i>	88.25	<i>ADE</i>	87.69	<i>A</i>	47.89
<i>ABDE</i>	3.11	<i>AD</i>	4.06	<i>A</i>	35.83	<i>AD</i>	2.64	<i>A</i>	5.86	<i>ADE</i>	38.13
<i>ADEG</i>	2.55	<i>A</i>	3.42	<i>AD</i>	12.06	<i>ABDE</i>	2.37	<i>AD</i>	5.21	<i>AD</i>	12.09
<i>ADEH</i>	2.09	<i>ABDE</i>	0.42		0.60	<i>ADEG</i>	1.94	<i>ABDE</i>	0.31		1.07
<i>AD</i>	1.95	<i>ADEG</i>	0.33	<i>AH</i>	0.14	<i>ADEH</i>	1.59	<i>ADEG</i>	0.24	<i>AH</i>	0.14
<i>ADEI</i>	0.75	<i>ADEH</i>	0.25	<i>AG</i>	0.10	<i>A</i>	1.12	<i>ADEH</i>	0.18	<i>D</i>	0.12
<i>ACDE</i>	0.69	<i>ADEI</i>	0.07	<i>D</i>	0.09	<i>ADEI</i>	0.57		0.07	<i>AG</i>	0.10
<i>A</i>	0.62	<i>ACDE</i>	0.06	<i>AE</i>	0.07	<i>ACDE</i>	0.53	<i>AH</i>	0.07	<i>AE</i>	0.07
<i>ACDEG</i>	0.35	<i>AH</i>	0.05	<i>AI</i>	0.07	<i>ACDEG</i>	0.20	<i>ADEI</i>	0.05	<i>AI</i>	0.07
<i>ADEF</i>	0.21	<i>AG</i>	0.04	<i>AC</i>	0.05	<i>ADEF</i>	0.16	<i>AG</i>	0.05	<i>AC</i>	0.05
<i>ABDEG</i>	0.18		0.03	<i>AF</i>	0.05	<i>ABDEG</i>	0.11	<i>ACDE</i>	0.04	<i>AF</i>	0.05
<i>ADEGH</i>	0.08	<i>AE</i>	0.03	<i>AB</i>	0.05	<i>AH</i>	0.05	<i>AE</i>	0.03	<i>AB</i>	0.05
...		...		...		...		...		...	

Probabilité a posteriori d'être actif pour un facteur											
<i>A</i>	99.99	<i>A</i>	99.95	<i>A</i>	99.21	<i>A</i>	99.98	<i>A</i>	99.89	<i>A</i>	98.68
<i>B</i>	3.41	<i>B</i>	0.45	<i>B</i>	0.08	<i>B</i>	2.56	<i>B</i>	0.34	<i>B</i>	0.08
<i>C</i>	1.12	<i>C</i>	0.10	<i>C</i>	0.07	<i>C</i>	0.79	<i>C</i>	0.08	<i>C</i>	0.07
<i>D</i>	99.22	<i>D</i>	96.34	<i>D</i>	62.95	<i>D</i>	98.66	<i>D</i>	93.80	<i>D</i>	50.39
<i>E</i>	97.13	<i>E</i>	92.26	<i>E</i>	50.86	<i>E</i>	95.89	<i>E</i>	88.57	<i>E</i>	38.25
<i>F</i>	0.26	<i>F</i>	0.04	<i>F</i>	0.06	<i>F</i>	0.21	<i>F</i>	0.04	<i>F</i>	0.07
<i>G</i>	3.27	<i>G</i>	0.40	<i>G</i>	0.14	<i>G</i>	2.39	<i>G</i>	0.31	<i>G</i>	0.13
<i>H</i>	2.34	<i>H</i>	0.32	<i>H</i>	0.17	<i>H</i>	1.78	<i>H</i>	0.26	<i>H</i>	0.16
<i>I</i>	0.86	<i>I</i>	0.10	<i>I</i>	0.08	<i>I</i>	0.66	<i>I</i>	0.09	<i>I</i>	0.09

Tab. 3.13 – *Revivification : Détermination bayésienne d'un modèle*

apparaisse comme le plus probable a posteriori.

L'analyse de variance, avec les trois seuls facteurs  $A$ ,  $D$ ,  $E$  trouvés actifs, donne les résultats figurant au tableau 3.14. Les moyennes  $\hat{\tau}(A,D,E)$  reportées peuvent être dans ce cas orthogonal soit calculées directement à partir des données, soit reconstituées à partir des estimations des effets, en utilisant la formule

$$\hat{\tau}(A,D,E) = \hat{e}(\mathbf{1}) + E \hat{e}(E) + D \hat{e}(D) + DE \hat{e}(DE) + A \hat{e}(A) + AE \hat{e}(AE) + AD \hat{e}(AD) + ADE \hat{e}(ADE)$$

qui donne par exemple pour  $(A,D,E) = (-1,1,-1)$

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(-1,1,-1) &= 6.937 + (-1) \times (-0.041) + 1 \times (-0.122) + (-1) \times (-0.151) \\ &\quad + (-1) \times (-0.219) + 1 \times 0.027 + (-1) \times (-0.083) + 1 \times 0.012 \\ &= 7.35 . \end{aligned}$$

Chaque moyenne, calculée avec 4 données, a  $0.0315/4 = 0.0079$  comme variance estimée et 0.09 comme écart-type. On en déduit, compte tenu de ce que  $t_\alpha = 2.06$  pour  $\alpha = 5\%$  et 24 degrés de liberté, la demi-amplitude  $0.18 = 2.06 \times 0.09$  de son intervalle de confiance au seuil 95%.

Variance expliquée 0.4347 ddl = 7  
Variance d'erreur 0.0315 ddl = 24

	$F(1,24)$	$P(\%)$	$S$	effet	$\hat{\gamma}$	+/- (95%)	+/- (99%)	Moyennes $\hat{\tau}(A,D,E)$						
								$A$	$D$	$E$	moy	+/- (95%)		
$E$	1.7	20.7			6.937	0.065	0.088							
$D$	15.1	0.1	***	$E$	-0.041	0.065	0.088	1	1	1	6.36	0.18		
$DE$	23.1	0.0	***	$D$	-0.122	0.065	0.088	1	1	-1	6.67	0.18		
$A$	49.0	0.0	***	$DE$	-0.151	0.065	0.088	1	-1	1	7.05	0.18		
$AE$	0.7	40.0		$A$	-0.219	0.065	0.088	1	-1	-1	6.8	0.18		
$AD$	7.0	1.4	*	$AE$	0.027	0.065	0.088	-1	1	1	6.89	0.18		
$ADE$	0.1	70.8		$AD$	-0.083	0.065	0.088	-1	1	-1	7.35	0.18		
				$ADE$	0.012	0.065	0.088	-1	-1	1	7.29	0.18		
								-1	-1	-1	7.1	0.18		

TAB. 3.14 – *Revivification : analyse de variance avec les seuls facteurs actifs*

### 3.4 Complément sur les fractions régulières

#### 3.4.1 Fraction 1/4 parallèles d'un 2<sup>6</sup>

Revenons à l'exemple de la fraction  $2^{6-2}$  du paragraphe 3.2.7. En modifiant éventuellement les signes de  $E$  et  $F$  dans (3.18), on obtient les 4 ensembles suivants de relations de définition

$$\begin{aligned} E &= ABC, & F &= BCD, \\ E &= ABC, & F &= -BCD, \\ E &= -ABC, & F &= BCD, \\ E &= -ABC, & F &= -BCD, \end{aligned} \tag{3.26}$$

auxquels correspondent 4 fractions qui forment une partition du plan factoriel complet  $2^6$  en 4 fractions  $1/4$  disjointes. Pour des raisons données au paragraphe 3.6.2, ces 4 fractions sont dites *parallèles*. La première d'entre elles, caractérisée par des signes + est dite *fraction principale*.

Chacune de ces fractions conduit aux mêmes ensembles d'effets confondus. En revanche, les signes avec lesquels ces effets apparaissent dans les f.e.b, qui sont dérivés directement des signes sur la ligne correspondante de (3.26), varient d'une fraction à l'autre. Ainsi, si on choisit la première relation  $E = ABC$ ,  $F = BCD$  avec des signes positifs au lieu de (3.18), tous les signes – sont remplacés par des + dans (3.22) et le tableau 3.8.

Comme cela a déjà été signalé au paragraphe 3.2.6, ces différences de signes dans les f.e.b sont rarement utilisées pour le choix de la fraction qui peut donc être effectué au hasard.

### 3.4.2 Fraction $1/3$ d'un $3^4$ en trois blocs

La même technique de construction peut être utilisée avec des facteurs à trois niveaux. Supposons par exemple qu'il y a  $27 = 3^3$  unités expérimentales réparties en 3 blocs de taille 9 et que les traitements sont définis par quatre facteurs  $A, B, C, D$  à 3 niveaux. Le facteur bloc est noté  $R$ . Les niveaux des 5 facteurs  $A, B, C, D$  et  $R$  étant codés 0, 1, 2, on peut prendre  $A, B, C$  comme facteurs de base et définir  $D$  et  $R$  par

$$D = 2 + A + B + C \pmod{3}, \quad R = A + B + 2C \pmod{3}.$$

En notation multiplicative, les niveaux 0, 1, 2 sont remplacés par les puissances correspondantes  $1, j, j^2$  de la racine troisième  $j = \exp(2\pi i/3)$  de l'unité. Les relations définissant  $D$  et  $R$  deviennent alors

$$D = j^2 ABC, \quad R = ABC^2. \tag{3.27}$$

Le plan résultant est donné sous ses deux formes dans le tableau 3.15. Le mode d'obtention des colonnes de droites, qui précisent la randomisation effectuée, est indiqué plus loin.

Dans un tel plan en bloc, on fait généralement l'hypothèse que l'espérance de la réponse  $y$  est somme d'un effet du traitement et d'un effet du bloc :

$$E(y) = \tau(A,B,C,D) + \beta(R). \tag{3.28}$$

Les propriétés du plan s'expriment alors simplement si l'on définit les effets factoriels de manière similaire à celle utilisée pour les facteurs à deux niveaux au paragraphe 3.2.2. Ainsi

- les moyennes générales  $e(\mathbf{1}_T)$  et  $e(\mathbf{1}_B)$  des effets traitements et des effets blocs sont

$$e(\mathbf{1}_T) = \bar{\tau}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot) = \frac{1}{81} \sum_{A,B,C,D} \tau(A,B,C,D)$$

$D = 2 + A + B + C \pmod{3}$ $R = A + B + 2C \pmod{3}$					$D = j^2 ABC$ $R = ABC^2$					Randomisation (cf tableau 3.17)	
A	B	C	D	R	A	B	C	D	R	$R_0$	ind-rép
0	0	0	2	0	1	1	1	$j^2$	1	2	2
0	0	1	0	2	1	1	$j$	1	$j^2$	0	6
0	0	2	1	1	1	1	$j^2$	$j$	$j$	1	6
0	1	0	0	1	1	$j$	1	1	$j$	1	0
0	1	1	1	0	1	$j$	$j$	$j$	1	2	1
0	1	2	2	2	1	$j$	$j^2$	$j^2$	$j^2$	0	1
0	2	0	1	2	1	$j^2$	1	$j$	$j^2$	0	7
0	2	1	2	1	1	$j^2$	$j$	$j^2$	$j$	1	2
0	2	2	0	0	1	$j^2$	$j^2$	1	1	2	5
1	0	0	0	1	$j$	1	1	1	$j$	1	8
1	0	1	1	0	$j$	1	$j$	$j$	1	2	7
1	0	2	2	2	$j$	1	$j^2$	$j^2$	$j^2$	0	8
1	1	0	1	2	$j$	$j$	1	$j$	$j^2$	0	2
1	1	1	2	1	$j$	$j$	$j$	$j^2$	$j$	1	7
1	1	2	0	0	$j$	$j$	$j^2$	1	1	2	0
1	2	0	2	0	$j$	$j^2$	1	$j^2$	1	2	4
1	2	1	0	2	$j$	$j^2$	$j$	1	$j^2$	0	4
1	2	2	1	1	$j$	$j^2$	$j^2$	$j$	$j$	1	4
2	0	0	1	2	$j^2$	1	1	$j$	$j^2$	0	3
2	0	1	2	1	$j^2$	1	$j$	$j^2$	$j$	1	5
2	0	2	0	0	$j^2$	1	$j^2$	1	1	2	8
2	1	0	2	0	$j^2$	$j$	1	$j^2$	1	2	6
2	1	1	0	2	$j^2$	$j$	$j$	1	$j^2$	0	0
2	1	2	1	1	$j^2$	$j$	$j^2$	$j$	$j$	1	3
2	2	0	0	1	$j^2$	$j^2$	1	1	$j$	1	1
2	2	1	1	0	$j^2$	$j^2$	$j$	$j$	1	2	3
2	2	2	2	2	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j^2$	0	5

TAB. 3.15 – Un plan régulier pour 4 facteurs à 3 niveaux sur 3 blocs de 9 unités

$R_0$ , ind-rép sont les numéros de bloc et d'unité dans le bloc spécifiant l'unité expérimentale réelle à laquelle est affecté le traitement : cf le paragraphe 3.4.3

$$e(\mathbf{1}_B) = \bar{\beta}(\cdot) = \frac{1}{3} \sum_R \beta(R) .$$

- Les effets  $e(A)$ ,  $e(A^2)$ , associés aux deux degrés de liberté de l'effet principal du facteur  $A$ , sont donnés par une expression analogue à (3.2), dans laquelle les niveaux des facteurs ont leur codage multiplicatif  $1, j, j^2$ :

$$e(A) = \frac{1}{3} \sum_A \bar{A} \bar{\tau}(A, \cdot, \cdot, \cdot) = \frac{1}{3} \left( \bar{\tau}(1, \cdot, \cdot, \cdot) + \bar{j} \bar{\tau}(j, \cdot, \cdot, \cdot) + \bar{j}^2 \bar{\tau}(j^2, \cdot, \cdot, \cdot) \right) ,$$

$$e(A^2) = \frac{1}{3} \sum_A \bar{A}^2 \bar{\tau}(A, \cdot, \cdot, \cdot) = \frac{1}{3} \left( \bar{\tau}(1, \cdot, \cdot, \cdot) + \bar{j}^2 \bar{\tau}(j, \cdot, \cdot, \cdot) + \bar{j} \bar{\tau}(j^2, \cdot, \cdot, \cdot) \right) .$$

La barre sur  $A$  et  $j$  indique que l'on prend le nombre complexe conjugué, alors que celle sur  $\tau$  fait référence au fait que l'on prend la moyenne. Il n'y a pas de risque de confusion puisque  $\tau$  désigne toujours un réel. Pour une racine cubique de l'unité, le conjugué, l'inverse et le carré sont égaux. On peut donc remplacer  $\bar{A}$  par  $A^2$  ou  $A^{-1}$  et de même  $\bar{A}^2$  par  $A$ .

Les coefficients sont ici des nombres complexes. On montre cependant [Kobilinsky, 1990], [Kobilinsky et Monod, 1995] que pour l'étude des propriétés du plan, il est possible de procéder exactement comme dans le cas des facteurs à 2 niveaux sans se soucier du fait que ces coefficients et les effets ainsi définis sont complexes et non réels.

★ Il n'est en fait pas difficile de passer de ces effets complexes à des effets réels car  $e(A)$  et  $e(A^2)$  sont conjugués. Ils peuvent être donc combinés pour obtenir deux effets réels, par exemple

$$r(A) = e(A) + e(A^2) = \frac{1}{3} \left( 2\bar{\tau}(1, \cdot, \cdot, \cdot) - \bar{\tau}(j, \cdot, \cdot, \cdot) - \bar{\tau}(j^2, \cdot, \cdot, \cdot) \right) ,$$

$$r(A^2) = -ie(A) + ie(A^2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\bar{\tau}(j, \cdot, \cdot, \cdot) + \bar{\tau}(j^2, \cdot, \cdot, \cdot) \right) .$$

Mais une reparamétrisation utilisant de tels effets réels amène des complications inutiles de la structure de matrice  $X$ . En travaillant sur les effets complexes tels que  $e(A)$  et  $e(A^2)$ , on obtient plus facilement les propriétés du plan et les propriétés des effets réels en découlent de façon naturelle.

- Plus généralement, les effets factoriels sont définis par la formule

$$e(A^a B^b C^c D^d) = \frac{1}{81} \sum_{A,B,C,D} \overline{A^a B^b C^c D^d} \tau(A,B,C,D) ,$$

analogue de (3.4), où les exposants  $a, b, c, d$  prennent les valeurs 0, 1, 2. Les exposants non nuls indique la nature de l'effet factoriel considéré. Par exemple les effets associés aux 4 degrés de liberté de l'interaction entre les facteurs  $A$  et  $B$  sont  $e(AB)$ ,  $e(AB^2)$ ,  $e(A^2B)$ ,  $e(A^2B^2)$ .

#### Remarques.

- Comme  $A^3 = \dots = D^3 = 1$ , seule la valeur modulo 3 des exposants importe. On peut donc remplacer les exposants 2 par des  $-1$  et écrire par exemple  $e(A^{-1}BC^{-1})$  à la place de  $e(A^2BC^2)$ .
- Les effets  $e(A^a B^b C^c D^d)$  et  $e(A^{-a} B^{-b} C^{-c} D^{-d})$  sont conjugués. On peut donc comme dans le cas des effets  $e(A)$  et  $e(A^{-1}) = e(A^2)$  les combiner pour former deux effets factoriels réels appartenant à la même interaction.

En multipliant par  $D^2$  l'égalité  $D = j^2 ABC$ , puis en élevant au carré le résultat, on obtient les relations de définition suivantes

$$1 = j^2 ABCD^2 = jA^2B^2C^2D. \quad (3.29)$$

La multiplication par les 27 produits  $A^aB^bC^c$  entre les facteurs de base permet alors d'obtenir les égalités figurant à gauche du tableau 3.16. Les effets blocs  $R$  et  $R^2$  égaux respectivement à  $ABC^2$  et  $A^2B^2C$  ( $C^4 = C$ ) ont été rajoutés entre crochets.

Un développement similaire à celui du paragraphe 3.2.2 conduit aux égalités suivantes, analogues de (3.8) :

$$\tau(A,B,C,D) = \sum_{a,b,c,d} A^aB^bC^cD^d e(A^aB^bC^cD^d), \quad (3.30)$$

$$\beta(R) = \sum_e R^e e(R^e). \quad (3.31)$$

L'espérance de l'observation  $y(A,B,C)$  sur l'unité repérée par les niveaux  $(A,B,C)$  des facteurs de base est donc, si  $D = j^2 ABC$ ,  $R = ABC^2$  :

$$E(y(A,B,C)) = \sum_{a,b,c,d} A^aB^bC^cD^d e(A^aB^bC^cD^d) + \sum_e R^e e(R^e). \quad (3.32)$$

Compte tenu des égalités du tableau 3.16, on peut exprimer chacun des coefficients figurant dans cette somme en fonction d'un produit  $A^aB^bC^c$  entre les facteurs de base et grouper les effets correspondants. Par exemple, les égalités figurant dans la 5ème ligne donnent

$$AB^2C^2D^2 = jBC, \quad A^2D = j^2BC,$$

et la somme de trois termes correspondante est donc

$$BCe(BC) + AB^2C^2D^2e(AB^2C^2D^2) + A^2De(A^2D) = BC (e(BC) + je(AB^2C^2D^2) + j^2e(A^2D)).$$

Elle s'écrit donc sous la forme  $BC\gamma(BC)$  en notant  $\gamma(BC)$  la combinaison linéaire d'effets figurant entre parenthèses,

$$\gamma(BC) = e(BC) + je(AB^2C^2D^2) + j^2e(A^2D),$$

dont les coefficients 1,  $j$ ,  $j^2$  sont les conjugués de ceux qui apparaissent dans les égalités à gauche du tableau 3.16.

De même, les égalités de l'avant dernière ligne de ce tableau donnent

$$R^2 = A^2B^2C, \quad C^2D^2 = jA^2B^2C, \quad ABD = j^2A^2B^2C,$$

et la somme de termes associée est  $A^2B^2C\gamma(A^2B^2C)$  où

$$\gamma(A^2B^2C) = e(R^2) + e(A^2B^2C) + je(C^2D^2) + j^2e(ABD).$$

Les combinaisons linéaires  $\gamma(A^a B^b C^c)$  ainsi associées à tous les produits entre les facteurs de base sont reportées à droite du tableau 3.16. Le regroupement dans (3.32) des termes associés à des produits égaux conduit à l'écriture suivante du modèle

$$E(y(A,B,C)) = \sum_{a,b,c} A^a B^b C^c \gamma(A^a B^b C^c) \quad (3.33)$$

qui peut aussi se mettre sous la forme vectorielle

$$E(\mathbf{y}) = \sum_{a,b,c} \mathbf{x}_{A^a B^b C^c} \gamma(A^a B^b C^c)$$

en notant  $\mathbf{y}$  le vecteur des 27 observations et  $\mathbf{x}_{A^a B^b C^c}$  le vecteur des coefficients  $A^a B^b C^c$  de la combinaison linéaire  $\gamma(A^a B^b C^c)$ .

Cette dernière forme fait clairement apparaître qu'on ne peut pas estimer tous les effets factoriels, mais seulement les combinaisons linéaires  $\gamma(A^a B^b C^c)$ . Comme dans le cas des facteurs à 2 niveaux, ces sommes sont appelées *fonctions estimables de base*, de façon abrégée *f.e.b.*

A partir des égalités (3.29), on déduit directement les propriétés suivantes du plan (que l'on peut vérifier dans le tableau 3.16).

- Un effet principal ne se confond qu'avec des interactions de trois facteurs ou plus. Ce plan permet donc d'estimer tous les effets principaux dans un modèle incluant les interactions de deux facteurs et l'effet bloc.  
Ainsi, l'effet principal de  $A$  contient les deux contrastes  $A$  et  $A^2$ . La multiplication de  $A$  par les contrastes de définition donne  $A^2 B C D^2$  et  $B^2 C^2 D$  et  $A$  n'est donc confondu qu'avec ces interactions de 4 et trois facteurs respectivement. Le contraste  $A^2$  se confond de même avec une interaction de 3 facteurs  $B C D^2$  et une de 4 facteurs  $A B^2 C^2 D$ .
- Parmi les quatre degrés de liberté d'une interaction entre deux facteurs, deux se confondent avec une autre interaction de deux facteurs, et deux ne se confondent qu'avec des interactions de trois facteurs ou plus.
- Il n'y a pas d'ensemble de trois effets confondus qui ne contienne que des effets d'interactions de trois ou quatre facteurs.

La dernière propriété montre que toute autre définition de  $R$  confondrait l'effet bloc avec au moins une interaction de deux facteurs. Cependant le choix effectué ici rend inestimables les effets d'interaction  $e(CD)$  et  $e(C^2 D^2)$  même si les interactions de trois ou quatre facteurs sont supposées nulles. Un choix plus judicieux serait  $R = C + 2D$ . Ce choix permettrait de confondre l'effet bloc avec les effets  $e(CD^2)$  et  $e(C^2 D)$  qui sont déjà confondus avec d'autres interactions de 2 facteurs et de toute façon inestimables.

### 3.4.3 Randomisation d'un plan en blocs

Dans un plan en bloc de ce type, la randomisation s'effectue en deux temps. Les vrais blocs d'unités expérimentales sont numérotés et on choisit au hasard, pour chaque niveau

égalités induites par (3.29) en multipliant par $A^a B^b C^c$			f.e.b $\gamma(A^a B^b C^c)$ (et effets confondus)
$\mathbf{1}$	$= j^2 ABCD^2 =$	$jA^2 B^2 C^2 D$	$e(\mathbf{1}) + je(ABCD^2) + j^2 e(A^2 B^2 C^2 D)$
$C$	$= j^2 ABC^2 D^2 =$	$jA^2 B^2 D$	$e(C) + je(ABC^2 D^2) + j^2 e(A^2 B^2 D)$
$C^2$	$= j^2 ABD^2 =$	$jA^2 B^2 CD$	$e(C^2) + je(ABD^2) + j^2 e(A^2 B^2 CD)$
$B$	$= j^2 AB^2 CD^2 =$	$jA^2 C^2 D$	$e(B) + je(AB^2 CD^2) + j^2 e(A^2 C^2 D)$
$BC$	$= j^2 AB^2 C^2 D^2 =$	$jA^2 D$	$e(BC) + je(AB^2 C^2 D^2) + j^2 e(A^2 D)$
$BC^2$	$= j^2 AB^2 D^2 =$	$jA^2 CD$	$e(BC^2) + je(AB^2 D^2) + j^2 e(A^2 CD)$
$B^2$	$= j^2 ACD^2 =$	$jA^2 BC^2 D$	$e(B^2) + je(ACD^2) + j^2 e(A^2 BC^2 D)$
$B^2 C$	$= j^2 AC^2 D^2 =$	$jA^2 BD$	$e(B^2 C) + je(AC^2 D^2) + j^2 e(A^2 BD)$
$B^2 C^2$	$= j^2 AD^2 =$	$jA^2 BCD$	$e(B^2 C^2) + je(AD^2) + j^2 e(A^2 BCD)$
$A$	$= j^2 A^2 BCD^2 =$	$jB^2 C^2 D$	$e(A) + je(A^2 BCD^2) + j^2 e(B^2 C^2 D)$
$AC$	$= j^2 A^2 BC^2 D^2 =$	$jB^2 D$	$e(AC) + je(A^2 BC^2 D^2) + j^2 e(B^2 D)$
$AC^2$	$= j^2 A^2 BD^2 =$	$jB^2 CD$	$e(AC^2) + je(A^2 BD^2) + j^2 e(B^2 CD)$
$AB$	$= j^2 A^2 B^2 CD^2 =$	$jC^2 D$	$e(AB) + je(A^2 B^2 CD^2) + j^2 e(C^2 D)$
$ABC$	$= j^2 A^2 B^2 C^2 D^2 =$	$jD$	$e(ABC) + je(A^2 B^2 C^2 D^2) + j^2 e(D)$
$[R] = ABC^2$	$= j^2 A^2 B^2 D^2 =$	$jCD$	$[e(R)] + e(ABC^2) + je(A^2 B^2 D^2) + j^2 e(CD)$
$AB^2$	$= j^2 A^2 CD^2 =$	$jBC^2 D$	$e(AB^2) + je(A^2 CD^2) + j^2 e(BC^2 D)$
$AB^2 C$	$= j^2 A^2 C^2 D^2 =$	$jBD$	$e(AB^2 C) + je(A^2 C^2 D^2) + j^2 e(BD)$
$AB^2 C^2$	$= j^2 A^2 D^2 =$	$jBCD$	$e(AB^2 C^2) + je(A^2 D^2) + j^2 e(BCD)$
$A^2$	$= j^2 BCD^2 =$	$jAB^2 C^2 D$	$e(A^2) + je(BCD^2) + j^2 e(AB^2 C^2 D)$
$A^2 C$	$= j^2 BC^2 D^2 =$	$jAB^2 D$	$e(A^2 C) + je(BC^2 D^2) + j^2 e(AB^2 D)$
$A^2 C^2$	$= j^2 BD^2 =$	$jAB^2 CD$	$e(A^2 C^2) + je(BD^2) + j^2 e(AB^2 CD)$
$A^2 B$	$= j^2 B^2 CD^2 =$	$jAC^2 D$	$e(A^2 B) + je(B^2 CD^2) + j^2 e(AC^2 D)$
$A^2 BC$	$= j^2 B^2 C^2 D^2 =$	$jAD$	$e(A^2 BC) + je(B^2 C^2 D^2) + j^2 e(AD)$
$A^2 BC^2$	$= j^2 B^2 D^2 =$	$jACD$	$e(A^2 BC^2) + je(B^2 D^2) + j^2 e(ACD)$
$A^2 B^2$	$= j^2 CD^2 =$	$jABC^2 D$	$e(A^2 B^2) + je(CD^2) + j^2 e(ABC^2 D)$
$[R^2] = A^2 B^2 C$	$= j^2 C^2 D^2 =$	$jABD$	$[e(R^2)] + e(A^2 B^2 C) + je(C^2 D^2) + j^2 e(ABD)$
$A^2 B^2 C^2$	$= j^2 D^2 =$	$jABCD$	$e(A^2 B^2 C^2) + je(D^2) + j^2 e(ABCD)$

TAB. 3.16 – Effets confondus dans la fraction  $1/3$  d'un  $3^4$  en 3 blocs

symbolique de bloc 0, 1, 2 obtenu dans la construction, le numéro du vrai bloc associé. Puis on tire au hasard, dans chaque bloc, le numéro d'unité affecté à chaque traitement. Le tableau 3.17 donne un résultat possible de cette randomisation qui conduit aux colonnes intitulées  $R_0$  et *ind-rép* du tableau 3.15. La colonne  $R_0$  donne le numéro du vrai bloc, *ind-rép* celui de l'unité dans le bloc.

no. de bloc dans le plan systématique	$R$	0	1	2
no. du véritable bloc	$R_0$	2	1	0

$R$	$R_0$	no. des unités affectées aux traitements du bloc								
		ind-rép								
0	2	2	1	5	7	0	4	8	6	3
1	1	6	0	2	8	7	4	5	3	1
2	0	6	1	7	8	2	4	3	0	5

TAB. 3.17 – Randomisation d'un plan en bloc

L'importance de cette randomisation est facile à comprendre. Imaginons par exemple que les blocs correspondent à des étuves comprenant 9 positions. Disposer les traitements dans les étuves en suivant l'ordre du tableau 3.15 pourrait amener le niveau 1 de  $A$  systématiquement au centre et biaiser ainsi la comparaison entre ce niveau et les deux autres.

D'un point de vue mathématique, dans les cas où la réponse peut être modélisée comme somme de l'effet traitement et de l'effet unité expérimentale, on montre que la randomisation garantit la validité de la plupart des hypothèses sous-tendant l'analyse de variance classique [Bailey, 1981].

## 3.5 Plans de résolution 3, 4, 5

### 3.5.1 Résolution d'une fraction

On a vu au paragraphe 3.2.7 que les effets factoriels confondus avec un effet donné s'obtiennent en multipliant le produit de facteurs associé à cet effet par l'ensemble des produits égaux à 1. Ainsi, en multipliant par  $F$  la première ligne du tableau 3.7, on obtient

$$F = ABCEF = -BCD = -ADE .$$

Les effets confondus avec  $e(F)$  sur la fraction  $2^{6-2}$  du paragraphe 3.2.7 sont donc  $e(ABCEF)$ ,  $e(BCD)$ ,  $e(ADE)$ . Comme  $F = -BCD$ , ces effets sont les mêmes que ceux figurant sur la ligne 8 commençant par  $BCD$  dans le tableau 3.7.

De même la multiplication par  $AF$  des termes égaux à 1 donne les égalités

$$AF = BCEF = -ABCD = -DE$$

qui sont identiques à celles figurant sur la ligne 16 commençant par  $ABCD$  dans le tableau 3.7. Les effets confondus avec  $e(AF)$  sont donc  $e(BCEF)$ ,  $e(ABCD)$ ,  $e(DE)$ .

Chaque produit égal à 1 sur la première ligne du tableau 3.7 contient 4 facteurs. La multiplication par un facteur, par exemple  $F$ , laisse donc subsister 3 facteurs au moins. Par suite, les effets principaux ne se confondent qu'avec des interactions de trois facteurs au moins et sont estimables quand ces interactions sont supposées nulles. Le plan est alors dit de résolution 4 [Box et Hunter, 1961]. La résolution 4 se définit plus généralement comme suit.

**Définition 3.1 (Résolution 4)** *Un plan est dit de résolution 4 s'il permet d'estimer tous les effets principaux dans le modèle comprenant ces effets et également toutes les interactions de deux facteurs.*

La résolution 4 garantit donc une certaine robustesse pour l'estimation des effets principaux, qui peuvent être estimés sans biais même si les interactions de deux facteurs ne sont pas nulles. En revanche, elle ne garantit pas que ces interactions soient elles même toutes estimables.

Pour une fraction régulière, définie par des relations de définition comme (3.18), la définition de la résolution 4 prend donc la forme suivante.

**Proposition 3.1** *Une fraction régulière est de résolution 4 si les effets confondus avec la moyenne générale sont des interactions de 4 facteurs au moins.*

On peut aussi dire qu'une fraction régulière est de résolution 4 si ses mots de définition (différents de  $\mathbf{1}$ ) ont une longueur minimale de 4.

Pour une fraction de résolution 4, la régularité implique que la variance d'estimation de chaque effet principal dans le modèle comprenant les interactions de deux facteurs est minimum [Kobilinsky, 1990]. Ainsi dans l'exemple de la fraction  $1/4$ ,  $\hat{e}(F) = -\hat{\gamma}(BCD)$  est estimé avec la variance  $\sigma^2/16$  qui est la plus petite variance que l'on peut obtenir avec 16 observations pour estimer cet effet.

On définit sans difficulté la résolution  $R$  pour n'importe quel entier  $R \geq 3$ . Avant d'énoncer la définition générale, précisons la définition des plans de résolution 3 et 5, les plus importants en pratique avec ceux de résolution 4.

**Définition 3.2 (Résolution 3)** *Un plan est dit de résolution 3 si, sous l'hypothèse que les interactions sont toutes nulles, il permet d'estimer tous les effets principaux.*

**Proposition 3.2** *Une fraction régulière est de résolution 3 si les effets confondus avec la moyenne générale sont des interactions de 3 facteurs au moins.*

La fraction  $1/2$  du tableau 3.1 donne un exemple de fraction régulière de résolution 3, puisque le seul effet factoriel confondu avec la moyenne générale dans cette fraction est  $e(ABC)$ .

**Définition 3.3 (Résolution 5)** *Un plan est dit de résolution 5 si, sous l'hypothèse que les interactions de trois facteurs ou plus sont nulles, il permet d'estimer tous les effets principaux et interactions de deux facteurs.*

**Proposition 3.3** *Une fraction régulière est de résolution 5 si les effets confondus avec la moyenne générale sont des interactions de 5 facteurs au moins.*

La définition plus générale distingue le cas  $R$  pair du cas  $R$  impair.

**Définition 3.4 (Résolution  $R$  pour  $R$  pair)** *Soit  $R$  un nombre entier pair supérieur ou égal à 4 et  $S = R/2$ . Un plan est dit de résolution  $R$  si, sous l'hypothèse que les interactions de  $S + 1$  facteurs ou plus sont nulles, il permet d'estimer tous les effets principaux et interactions comportant au maximum  $S - 1$  facteurs.*

Dans un tel plan, les interactions de  $S$  facteurs ne sont donc pas obligatoirement estimables, mais leur présence dans le modèle n'empêche pas l'estimation des effets impliquant moins de  $S - 1$  facteurs.

**Définition 3.5 (Résolution  $R$  pour  $R$  impair)** *Soit  $R$  un nombre entier impair supérieur ou égal à 3 et  $S = (R - 1)/2$ . Un plan est dit de résolution  $R$  si, sous l'hypothèse que les interactions de  $S + 1$  facteurs ou plus sont nulles, il permet d'estimer tous les effets principaux et interactions comportant au maximum  $S$  facteurs.*

Dans les deux cas,  $R$  pair ou impair, la résolution d'un plan régulier peut se définir de la façon suivante.

**Proposition 3.4** *Une fraction régulière est de résolution  $R$  si les effets confondus avec la moyenne générale sont des interactions de  $R$  facteurs au moins.*

Autrement dit, un plan régulier est de résolution  $R$  si les mots de définition (différents de  $\mathbf{1}$ ) ont une longueur minimum  $R$ .

**Remarques :**

- L’estimabilité de la moyenne générale est habituellement aussi incluse dans la définition des plans de résolution 3, 4, 5. Cette estimabilité est automatiquement impliquée par la régularité.
- Avec ces définitions, un plan de résolution 4 est a fortiori de résolution 3 et un plan de résolution 5 a fortiori de résolution 4 et 3. En pratique, on indique toujours la plus forte résolution connue du plan. Beaucoup d’auteurs considèrent d’ailleurs que la résolution d’un plan régulier est la longueur de son plus court mot de définition différent de  $\mathbf{1}$ .

Pour un nombre d’unités expérimentales donné, le nombre de facteurs qu’il est possible d’étudier diminue de façon nette lorsque la résolution augmente. Il y a un donc un compromis à trouver entre la résolution et le nombre de facteurs étudiés. Le compromis dépend du type de problème posé. Dans un état de grande ignorance des phénomènes, l’examen d’un nombre important de facteurs au moyen d’un plan de résolution 3 permet de déceler rapidement les quelques facteurs actifs dont les effets doivent être ultérieurement précisés par un plan de résolution supérieure. Dans cette perspective, il est même possible d’augmenter encore le nombre de facteurs en utilisant des plans dits supersaturés où le nombre de facteurs dépasse le nombre d’unités [Lin, 1995]. Ces plans de résolution 3 et supersaturés ne sont cependant adaptés que si seuls quelques facteurs sont supposés avoir un effet important au sein d’un ensemble beaucoup plus vaste sur lequel on opère un criblage. Si cette hypothèse est erronée, l’analyse fait émerger un nombre important d’effets significatifs et il devient difficile de conclure compte tenu des confusions entre les effets principaux et les interactions.

Lorsque l’avancement des connaissances permet de préciser un petit nombre de facteurs actifs, on vise généralement la résolution 5 ou, si les interactions peuvent être précisées, un plan plus spécifiquement adapté à l’étude de ces interactions.

La résolution 4 peut être un bon intermédiaire lorsque les facteurs recensés ont a priori de bonnes chances d’être actifs et d’interagir. Dans ce cas, la résolution 3 est insuffisante et la résolution 5 oblige à une réduction hasardeuse du nombre de facteurs étudiés. La résolution 4 permet d’étudier beaucoup plus de facteurs que la résolution 5 tout en garantissant que les estimations des effets principaux ne sont pas biaisées par les interactions de deux facteurs comme en résolution 3. Elle donne aussi souvent des indications sérieuses sur ces interactions.

Il est important pour sélectionner un bon plan d’avoir une idée du nombre de facteurs qu’il est possible d’introduire avec un nombre d’unités et une résolution donnée. Après avoir précisé comment un majorant à ce nombre peut être obtenu simplement dans le cas général où les facteurs ont des nombres de niveaux quelconques, on étudie plus en détail

les cas où tous les facteurs ont un même nombre de niveaux, égal soit à 2, soit à 3. De tels plans, où tous les facteurs ont le même nombre de niveaux, sont appelés *symétriques*. Ultérieurement sera abordée la question des plans *asymétriques* mélangeant des facteurs avec des nombres de niveaux différents.

### 3.5.2 Majoration du nombre de facteurs dans le cas général

Le modèle d'analyse de variance est noté

$$E(\mathbf{y}) = X\mathbf{e} \quad (3.34)$$

où  $\mathbf{e}$  désigne le vecteur des effets factoriels non nuls. La paramétrisation adoptée est donc de même type que dans (3.10) ou (3.32). En particulier, le vecteur  $\mathbf{e}$  des effets contient une moyenne générale et, pour chaque effet principal ou interaction, un nombre de paramètres exactement égal au nombre de degrés de liberté associé.

Rappelons que ce modèle est en fait extrait d'un modèle plus général spécifiant la réponse théorique pour chacun des traitements du plan factoriel complet. Comme en (3.7), on note  $\boldsymbol{\tau} = Z\mathbf{e}$  ce modèle pour le plan factoriel complet, de sorte que  $X$  est formé des lignes de  $Z$  associées aux traitements du plan retenu. En l'absence d'hypothèse sur les effets factoriels,  $Z$  est une matrice carrée inversible. Si certains effets factoriels sont supposés nuls, les colonnes associées sont supprimées et la matrice  $Z$  n'est plus carrée, mais elle reste de plein rang. Pour cette raison, on dit que la *reparamétrisation* en fonction du vecteur  $\mathbf{e}$  des effets factoriels non nuls est *de plein rang*, bien que la matrice  $X$  extraite de  $Z$  puisse avoir des colonnes colinéaires et donc ne pas être elle de plein rang.

Si la matrice  $X$  a ses colonnes orthogonales, on dira que le *plan* est *orthogonal*.

Dans les plans factoriels, on étudie souvent isolément chaque effet factoriel. Considérons un tel effet. Notons  $\mathbf{e}_1$  le vecteur de paramètres correspondants,  $X_1$  la matrice formée des colonnes associées de  $X$ , et de même  $\mathbf{e}_0$  le vecteur des autres paramètres et  $X_0$  la matrice des colonnes de  $X$  associées. Après avoir réordonné convenablement les paramètres de  $\mathbf{e}$  et colonnes de  $X$ , le modèle (3.34) peut être réécrit sous la forme partitionnée suivante

$$E(\mathbf{y}) = X_0\mathbf{e}_0 + X_1\mathbf{e}_1 . \quad (3.35)$$

Pour obtenir l'estimateur des moindres carrés de  $\mathbf{e}_1$  lorsque on fait l'hypothèse classique (3.17) sur les variances, il est commode d'introduire l'opérateur de projection orthogonale  $P_0 = X_0(X_0'X_0)^{-1}X_0'$  sur l'espace  $\{X_0\}$  engendré par les colonnes de  $X_0$ , ainsi que l'opérateur de projection orthogonale  $Q_0 = \mathbf{I} - P_0$  sur le supplémentaire orthogonal  $\{X_0\}^\perp$  de cet espace. On réécrit (3.35) sous la forme

$$E(\mathbf{y}) = X_0\mathbf{e}_0 + P_0X_1\mathbf{e}_1 + Q_0X_1\mathbf{e}_1 = X_0\boldsymbol{\beta}_0 + Q_0X_1\mathbf{e}_1$$

où

$$\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{e}_0 + (X_0'X_0)^{-1}X_0'X_1\mathbf{e}_1 .$$

Compte tenu du fait que  $Q_0X_0 = 0$ , les équations normales associées prennent la forme

$$\begin{bmatrix} X_0'\mathbf{y} \\ X_1'Q_0\mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0'X_0 & 0 \\ 0 & X_1'Q_0X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{bmatrix} ,$$

et  $\mathbf{e}_1$  est solution des équations normales réduites

$$X_1' Q_0 \mathbf{y} = X_1' Q_0 X_1 \mathbf{e}_1 .$$

Il est estimable si la matrice  $X_1' Q_0 X_1$ , dite *matrice d'information pour  $\mathbf{e}_1$* , est inversible. L'estimateur de  $\mathbf{e}_1$  et sa matrice de variance sont alors

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = (X_1' Q_0 X_1)^{-1} X_1' Q_0 \mathbf{y}, \quad \text{Var}(\hat{\mathbf{e}}_1) = \sigma^2 (X_1' Q_0 X_1)^{-1} .$$

Toute hypothèse supplémentaire de nullité d'effets factoriels autre que l'effet  $\mathbf{e}_1$  se traduit par la suppression de colonnes dans  $X_0$ . Soit  $\tilde{X}_0$  la sous matrice résultante,  $\tilde{Q}_0$  l'opérateur de projection orthogonale sur  $\{\tilde{X}_0\}^\perp$ . Il est clair que  $\{\tilde{X}_0\} \subset \{X_0\}$  et donc que  $\{X_0\}^\perp \subset \{\tilde{X}_0\}^\perp$ . Par suite  $Q_0 \tilde{Q}_0 = Q_0$  et

$$X_1' Q_0 X_1 = X_1' \tilde{Q}_0 Q_0 \tilde{Q}_0 X_1 \leq X_1' \tilde{Q}_0 \tilde{Q}_0 X_1 = X_1' \tilde{Q}_0 X_1 .$$

L'inégalité résulte de ce que  $\mathbf{x}' Q_0 \mathbf{x} \leq \mathbf{x}' \mathbf{x}$  pour tout vecteur  $\mathbf{x}$ .

En d'autres termes, le fait de diminuer le modèle en supprimant des colonnes dans  $X_0$  amène une augmentation de la matrice d'information pour  $\mathbf{e}_1$  :

$$X_1' Q_0 X_1 \leq X_1' \tilde{Q}_0 X_1 .$$

Par suite si  $\mathbf{e}_1$  est estimable dans le modèle avec  $X_0$ , c'est-à-dire si  $X_1' Q_0 X_1$  est inversible, il reste estimable dans le modèle diminué. Sa matrice de covariance est alors plus petite dans le modèle diminué :

$$(X_1' \tilde{Q}_0 X_1)^{-1} \leq (X_1' Q_0 X_1)^{-1} .$$

En particulier, on a la proposition suivante :

**Proposition 3.5** *La matrice d'information relative à un terme du modèle ne peut qu'augmenter lorsqu'on supprime d'autres termes du modèle.*

En résolution 3 ou 5, tous les paramètres du modèle doivent être estimés et la matrice  $X$  doit donc être de plein rang. Cela implique que le nombre de paramètres est inférieur au nombre d'unités expérimentales. Cette propriété permet d'obtenir, pour un nombre d'unités donné, un majorant au nombre de facteurs introduisibles. Lorsque le nombre de paramètres est exactement égal au nombre d'unités, le plan est dit *saturé*.

Le résultat suivant de Margolin [1969] permet d'obtenir un majorant analogue en résolution 4. Ce résultat s'applique quels que soient les nombres de niveaux des facteurs du plan.

**Proposition 3.6 (Margolin)** *Dans un plan de résolution 4, les colonnes de  $X$  associées à la constante, aux effets principaux et aux interactions avec un facteur déterminé sont linéairement indépendantes et leur nombre est donc inférieur au nombre d'unités.*

Si ce nombre de colonnes est égal au nombre d'unités, on dira que le plan de résolution 4 est *saturé*.

La proposition 3.5 montre que la suppression de facteurs dans une fraction ne peut qu'en augmenter la résolution. A partir d'un plan de résolution  $R$  comportant  $h$  facteurs, on peut donc en supprimant des facteurs obtenir un plan de résolution  $R$  comportant le même nombre d'unités et un nombre de facteurs  $g$  inférieur à  $h$ . Cependant, un plan ainsi obtenu aura généralement des propriétés nettement moins bonnes que d'autres plans spécifiquement conçus pour ce nombre précis  $g$  de facteurs. Ce n'est donc généralement pas une bonne méthode pour obtenir un plan à  $g$  facteurs que de supprimer arbitrairement des facteurs d'un plan de catalogue comportant un nombre  $h$  supérieur de facteurs.

### 3.5.3 Majoration du nombre de facteurs pour des facteurs à deux niveaux

Si il y a  $h$  facteurs à deux niveaux,  $N$  unités expérimentales, les considérations précédentes conduisent aux inégalités suivantes :

Résolution	
3	$N \geq 1 + h,$
4	$N \geq 2h,$
5	$N \geq 1 + h + h(h - 1)/2.$

#### Résolution 3

En résolution 3,  $h$  est donc majoré par  $N - 1$ . Ce majorant est en fait atteint par les plans dits de Plackett et Burman [1946], dérivés des matrices d'Hadamard, qui existent pour presque tous les entiers  $N = 4k$  multiple de 4 [Collombier, 1995], [Dey, 1985], [Hedayat et Wallis, 1978]. Ces plans sont orthogonaux et permettent d'estimer, dans le cadre du modèle sans interaction, chacun des  $N - 1$  effets principaux avec la variance minimum  $\sigma^2/N$ .

#### Résolution 4

En résolution 4,  $h$  est majoré par  $N/2$ . Ce majorant est atteint pour les plans obtenus en doublant un plan de Plackett et Burman par son opposé, et en rajoutant un facteur égal à  $-1$  sur le plan initial, à  $1$  sur l'opposé. Ces plans ont donc un nombre d'unités  $N = 8k$  multiple de 8. Ils permettent également d'estimer les  $N/2$  effets principaux avec la variance minimum  $\sigma^2/N$  dans le cadre du modèle incluant les interactions de deux facteurs. Ce *doublément par l'opposé* est aussi appelé *repliement* du plan (*foldover* en anglais).

Le tableau 3.18 donne à gauche le plan de Plackett et Burman pour  $N = 12$  unités et  $h = 11$  facteurs ( $A$  à  $K$ ), et à droite les 12 points supplémentaires à rajouter pour obtenir la résolution 4 avec 24 unités et 12 facteurs (les mêmes plus  $L$ ). Le plan de Plackett et Burman pour les 11 facteurs  $A$  à  $K$  figurant à gauche peut être construit simplement à partir de sa première ligne. Les lignes 2 à 11 sont les permutations circulaires de cette première ligne et la 12ème ligne a tous ses éléments égaux à  $-1$ . La matrice  $H$  de dimension  $12 \times 12$  formée par ce plan et la colonne de  $-1$  supplémentaire (facteur  $L$  à droite) est une matrice d'*Hadamard*, c'est-à-dire une matrice de 1 et  $-1$  satisfaisant  $H'H = N \mathbf{I}$ .

Lorsque  $N = 2^s$  avec  $s \geq 2$ , il existe un plan de Plackett et Burman régulier. Les

Fraction de résolution 4 pour 24 unités, 12 facteurs																							
unités 1 à 12 (plan à 11 fact. de réso. 3)												unité 13 à 24 : fraction opposée											
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1
-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

TAB. 3.18 – Création fraction de rés. 4 par repliement d’une fraction de rés. 3

facteurs définis y sont tous les produits entre facteurs de base. Par exemple, avec trois facteurs de base  $A, B, C$ , les 4 autres facteurs sont définis par  $D = \pm AB$ ,  $E = \pm AC$ ,  $F = \pm BC$ ,  $G = \pm ABC$ .

De même si  $N = 2^s$  avec  $s \geq 3$ , il existe un plan régulier de résolution 4 ayant le nombre maximum de facteurs  $N/2$ , par exemple le plan dont les facteurs définis sont tous les produits d’un nombre impair de facteurs de base. Si  $s = 4$ , ce plan est donné au signe près par les égalités  $E = ABC$ ,  $F = ABD$ ,  $G = ACD$ ,  $H = BCD$ .

★ La procédure permettant de construire une fraction de résolution 4 à partir d’une de résolution 3 conserve la régularité. Les facteurs de base de la fraction de résolution 4 sont ceux de la fraction initiale plus le facteur rajouté, égal à  $-1$  sur la fraction initiale et  $1$  sur l’opposé. Si un facteur défini est initialement le produit d’un nombre impair de facteurs de base, il garde la même définition. Si il est initialement produit d’un nombre pair de facteurs de base, il est multiplié par l’opposé du facteur rajouté.

Par exemple, à partir de la fraction initiale  $2^{7-4}$  définie par  $E = ABC$ ,  $F = AB$ ,  $G = AC$ ,  $H = BC$  et en notant  $D$  le facteur rajouté, on obtient la fraction définie par  $E = ABC$ ,  $F = -ABD$ ,  $G = -ACD$ ,  $H = -BCD$  qui est au signe près la même que la précédente.

### Résolution 5

Il n’y a pas de résultat aussi simple en résolution 5. Dans ce cas, l’inégalité  $N \geq 1 + h + h(h - 1)/2$  donne  $h \leq h_1$  où  $h_1$  est la partie entière de  $(-1 + \sqrt{8N - 7})/2$ . Mais cette borne ne peut être atteinte si l’on restreint le choix aux plans réguliers définis par des relations de définition. Pour ces derniers, des recherches exhaustives permettent, lorsque  $N = 2^s$  et  $s \leq 9$ , d’obtenir les nombres de facteurs maximum  $h_2$  donnés au tableau 3.19. L’étude des cas  $s = 8$  et  $s = 9$  a nécessité l’écriture d’un algorithme spécial [Draper et Mitchell, 1967, 1968, 1970] sur lequel nous reviendrons.

★ Draper et Mitchell utilisent le mot *saturé* pour désigner un plan régulier de résolution 5 comportant le nombre maximum de facteurs compatible avec la régularité. Ici et en général, le terme *saturé* désigne plutôt un plan ayant autant de données que de paramètres dans le modèle (avec une paramétrisation de plein rang).

$s$	4	5	6	7	8	9
$2^s$	16	32	64	128	256	512
$h_1$	5	7	10	15	22	31
$p_1$	16	29	56	121	254	497
$h_2$	5	6	8	11	17	$\geq 23$
$p_2$	16	22	37	67	154	277

TAB. 3.19 – Nb. maxi. de facteurs dans une fraction de taille  $2^s$ , résolution 5

$h_1$  : nb. maxi. pour avoir moins de paramètres que d'unités

$h_2$  : nb. maxi. pour avoir un plan régulier

$p_1, p_2$  : nb. de paramètres associés à  $h_1, h_2$

Pour  $s = 9$ , le résultat  $h_2 = 23$  est très vraisemblable, mais pas complètement prouvé

Ces plans réguliers de résolution 5 sont orthogonaux pour le modèle incluant les effets principaux et effets d'interactions entre deux facteurs. Ils donnent donc des estimateurs sans biais de variance minimale de chacun de ces effets. Ils ont un autre atout important qui leur confère une robustesse généralement absente des plans obtenus par des méthodes algorithmiques. Les estimateurs des effets principaux y demeurent non biaisés même dans le cas où les interactions de trois facteurs sont non nulles.

### 3.5.4 Majoration du nombre de facteurs pour des facteurs à trois niveaux

Avec  $h$  facteurs à trois niveaux,  $N$  unités expérimentales, le décompte des degrés de liberté ou la proposition de Margolin 3.6 conduisent aux inégalités suivantes :

Résolution

$$\begin{array}{ll} 3 & N \geq 1 + 2h, \\ 4 & N \geq 6h - 3, \\ 5 & N \geq 1 + 2h^2. \end{array}$$

#### Résolution 3

Lorsque  $N = 3^s$ , on peut former un plan régulier de résolution 3 comportant le nombre maximum  $h = (N - 1)/2$  de facteurs. Ainsi, avec 3 facteurs de base  $A, B, C$ , soit 27 unités, on peut étudier jusqu'à 13 facteurs à 3 niveaux. Pour les obtenir, on forme en notation multiplicative les produits  $A^a B^b C^c$  où  $a, b, c$  prennent les valeurs 0, 1, 2. Le facteur constant  $\mathbf{1} = A^0 B^0 C^0$  est éliminé et on ne retient pour chaque paire  $(A, A^2)$ ,  $(B, B^2)$ ,  $(AB, A^2 B^2)$ ,  $(AB^2, A^2 B)$ ,  $\dots$ , formée d'un terme et de son carré, qu'un des deux produits. Le plan résultant est donné au tableau 3.20.

Lorsque  $N$  n'est plus puissance de 3 mais de la forme  $N = 2 \times 3^s$ , on sait former un plan de résolution 3 orthogonal avec  $h = 3^s - 2$  facteurs [Addelman et Kempthorne, 1961]. Le nombre de paramètres du modèle  $y$  est  $1 + 2(3^s - 2) = N - 3$  et il s'agit donc d'un plan presque saturé.

#### Résolution 4

Il n'existe pas de méthode générale de création de plan régulier de résolution 4 et taille

$A$	$B$	$C$	$BC$	$BC^2$	$AC$	$AC^2$	$AB$	$ABC$	$ABC^2$	$AB^2$	$AB^2C$	$AB^2C^2$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$j$	1	1	1	1	$j$	$j$	$j$	$j$	$j$	$j$	$j$	$j$
$j^2$	1	1	1	1	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j^2$
1	$j$	1	$j$	$j$	1	1	$j$	$j$	$j$	$j^2$	$j^2$	$j^2$
$j$	$j$	1	$j$	$j$	$j$	$j$	$j^2$	$j^2$	$j^2$	1	1	1
$j^2$	$j$	1	$j$	$j$	$j^2$	$j^2$	1	1	1	$j$	$j$	$j$
1	$j^2$	1	$j^2$	$j^2$	1	1	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j$	$j$	$j$
$j$	$j^2$	1	$j^2$	$j^2$	$j$	$j$	1	1	1	$j^2$	$j^2$	$j^2$
$j^2$	$j^2$	1	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j$	$j$	$j$	1	1	1
1	1	$j$	$j$	$j^2$	$j$	$j^2$	1	$j$	$j^2$	1	$j$	$j^2$
$j$	1	$j$	$j$	$j^2$	$j^2$	1	$j$	$j^2$	1	$j$	$j^2$	1
$j^2$	1	$j$	$j$	$j^2$	1	$j$	$j^2$	1	$j$	$j^2$	1	$j$
1	$j$	$j$	$j^2$	1	$j$	$j^2$	$j$	$j^2$	1	1	$j$	$j^2$
$j$	$j$	$j$	$j^2$	1	$j^2$	1	$j^2$	1	$j$	1	$j$	$j^2$
$j^2$	$j$	$j$	$j^2$	1	1	$j$	1	$j$	$j^2$	$j$	$j^2$	1
1	$j^2$	$j$	1	$j$	$j$	$j^2$	$j^2$	1	$j$	$j$	$j^2$	1
$j$	$j^2$	$j$	1	$j$	$j^2$	1	1	$j$	$j^2$	$j^2$	1	$j$
$j^2$	$j^2$	$j$	1	$j$	1	$j$	$j$	$j^2$	1	1	$j$	$j^2$
1	1	$j^2$	$j^2$	$j$	$j^2$	$j$	1	$j^2$	$j$	1	$j^2$	$j$
$j$	1	$j^2$	$j^2$	$j$	1	$j^2$	$j$	1	$j^2$	$j$	1	$j^2$
$j^2$	1	$j^2$	$j^2$	$j$	$j$	1	$j^2$	$j$	1	$j^2$	$j$	1
1	$j$	$j^2$	1	$j^2$	$j^2$	$j$	$j$	1	$j^2$	$j^2$	$j$	1
$j$	$j$	$j^2$	1	$j^2$	1	$j^2$	$j^2$	$j$	1	1	$j^2$	$j$
$j^2$	$j$	$j^2$	1	$j^2$	$j$	1	1	$j^2$	$j$	$j$	1	$j^2$
1	$j^2$	$j^2$	$j$	1	$j^2$	$j$	$j^2$	$j$	1	$j$	1	$j^2$
$j$	$j^2$	$j^2$	$j$	1	1	$j^2$	1	$j^2$	$j$	$j^2$	$j$	1
$j^2$	$j^2$	$j^2$	$j$	1	$j$	1	$j$	1	$j^2$	1	$j^2$	$j$

Tab. 3.20 – Plan  $3^{13-10}$  de résolution 3

$N = 3^s$ . Pour  $s = 3$ , donc  $N = 27$ , il est facile de montrer qu'on ne peut introduire qu'un facteur supplémentaire en plus des trois facteurs de base. Cette limite supérieure de 4 facteurs imposée par la régularité est inférieure à la limite de 5 donnée par la proposition de Margolin 3.6. Pour  $s = 4$ , soit  $N = 81$ , Bose [1947] a montré par une méthode géométrique simple qu'on ne pouvait introduire plus que  $3^2 + 1 = 10$  facteurs dans un plan régulier. Il a aussi prouvé que cette limite peut être atteinte en exhibant explicitement une solution.

★ Les facteurs obtenus dans cette solution correspondent aux points d'une quadrique d'un espace projectif de dimension 3 sur le corps fini  $\mathcal{F}_3$ , quadrique non dégénérée en ce sens qu'elle ne contient pas trois points sur une même droite, propriété qui entraîne la résolution 4.

Il est facile aujourd'hui d'obtenir un tel plan à 10 facteurs par une méthode de recherche automatique comme celle décrite au § 3.11. Par contre, obtenir par programme la preuve qu'il n'existe pas de plan régulier à 11 facteurs peut prendre un temps assez considérable, et la méthode de preuve géométrique utilisée par Bose garde encore aujourd'hui tout son intérêt.

Pour  $N$  non puissance de 3, il n'y a pas de plan de résolution 4 orthogonal répertorié dans la littérature.

### Résolution 5

Les majorants connus du nombre de facteurs pour un plan à  $3^s$  unités de résolution 5 sont donnés dans le tableau 3.21, équivalent du tableau 3.19 pour les facteurs à trois niveaux. Il est facile de définir un plan régulier à 5 facteurs et  $3^4 = 81$  unités, par exemple par  $E = ABCD^2$  ou  $A, B, C, D$  sont les facteurs de base. Le plan régulier saturé à 11 facteurs, 243 unités, et le plan à 14 facteurs, 729 unités s'obtiennent facilement par des programmes tels que PLANOR [Kobilinsky, 1994], FKEY [GENSTAT 5, 1997] FACTEX [SAS-Institute Inc., 1989], KEYFINDER [Zemroch, 1992] utilisant une méthode de génération automatique comme celle décrite au § 3.11. Pour 15 facteurs, 729 unités, la procédure FACTEX, utilisée avec l'option NOCHECK pour explorer toutes les possibilités et un temps TIME= 120 (s), donne un diagnostic de non existence erroné, dû en fait à l'atteinte du temps limite.

$s$	3	4	5	6
$3^s$	27	81	243	729
$h_1$	3	6	11	19
$p_1$	19	73	243	723
$h_2$	3	5	11	$\geq 14$
$p_2$	19	51	243	$\geq 393$

TAB. 3.21 – Nb. maxi. de facteurs dans fraction de taille  $3^s$ , résolution 5

$h_1$  : nb. maxi. pour avoir moins de paramètres que d'unités  
 $h_2$  : nb. maxi. pour avoir un plan régulier  
 $p_1, p_2$  : nb. de paramètres associés à  $h_1, h_2$

★ La généralisation, à des facteurs ayant plus que 2 niveaux, de l'algorithme de Draper et Mitchell [1967] déjà cité permettrait peut-être de prouver l'existence ou la non existence d'une fraction régulière de résolution 5 à 15 facteurs, 729 unités. Mais la méthode générale utilisée par des programmes tels que

PLANOR, FKEY, FACTEX ne prend pas en compte les symétries et ne peut résoudre un tel problème dans un délai raisonnable.

## 3.6 Plans réguliers adaptés à des modèles plus particuliers

### 3.6.1 Obtention et comparaison des fractions $2^{h-m}$ de résolution donnée

Avec  $2^5$  unités, on a vu que l'on pouvait introduire jusqu'à 16 facteurs à 2 niveaux en résolution 4 et seulement 6 en résolution 5, dans un plan régulier. Avec un nombre intermédiaire de facteurs, on peut espérer rendre estimable, en plus des effets principaux, un certain nombre d'interactions.

Supposons par exemple qu'avec  $2^5 = 32$  unités, repérées par 5 facteurs de base  $A, B, C, D, E$ , on veuille introduire deux facteurs supplémentaires  $F, G$ . Le tableau 3.22 donne les trois fractions de résolution 4 que l'on peut obtenir, à une permutation des facteurs et aux signes près. On a indiqué à droite les profils de longueur des mots avec les notations de Brownlee *et al* [1948]. Toute autre solution est équivalente à l'une de ces trois dans le sens suivant.

**Définition 3.6 (Equivalence entre fractions)** *Deux fractions régulières telles que l'on passe des mots de définition de l'une à ceux de l'autre par une permutation des lettres sont dites équivalentes.*

On parle généralement d'un *type de fraction* pour désigner une fraction à l'équivalence près. On peut donc dire que le tableau 3.22 donne les trois types de fraction régulière  $2^{7-2}$  de résolution 4. Il est clair que deux fractions équivalentes doivent avoir le même profil de longueur des mots et donc que les 3 fractions du tableau sont non équivalentes. Dans

	Définition	Mots de définition	Profil
1	$F = ABCDE \quad G = ABC$	$\mathbf{1} \quad ABCDEF \quad ABCG \quad DEFG$	$4_2 6_1$
2	$F = ABCD \quad G = CDE$	$\mathbf{1} \quad ABCDF \quad CDEG \quad ABEFG$	$4_1 5_2$
3	$F = ABC \quad G = BCD$	$\mathbf{1} \quad ABCF \quad BCDG \quad ADFG$	$4_3$

TAB. 3.22 – Fractions  $2^{7-2}$  régulières de résolution 4

Profil: une notation comme  $4_2 6_1$  indique 2 mots de longueur 4 et 1 de longueur 6

ce cas de petite taille, la recherche qui permet de trouver tous les types de fractions et d'aboutir ainsi au tableau 3.22 peut se faire sans ordinateur de la façon suivante.

On note  $f$  et  $g$  les nombres de lettres des produits définissant  $F$  et  $G$ , et  $h$  le nombre de lettres commun à ces deux produits. Pour que le plan soit de résolution 4, on doit avoir  $f \geq 3$  et  $g \geq 3$ . D'autre part, on peut toujours supposer, quitte à interchanger  $F$  et  $G$  que  $f \geq g$ . Il est commode de classer alors les solutions en fonction des valeurs de  $f, g, h$ .

- $f = 5$ . Alors  $F = ABCDE$ . Si  $g \geq 4$ , le produit  $FG$  a 0 ou 1 lettre et le plan n'est pas de résolution 4. Donc  $g = 3$  et on peut supposer, à une permutation des facteurs

de base près, que  $G = ABC$ .

- $f = 4$ . On peut supposer  $F = ABCD$ . Si  $g = 4$ ,  $G$  comprend forcément la lettre  $E$  et  $h = 3$  autres lettres de  $F$ . A une permutation près des facteurs de base,  $G = BCDE$ . Si  $g = 3$ ,  $G$  doit comprendre  $E$  et  $h = 2$  autres lettres de  $F$  et on peut prendre  $G = CDE$ .
- $f = 3$ ,  $g = 3$ . On peut prendre  $F = ABC$ , puis  $G = BCD$  si  $h = 2$ ,  $G = CDE$  si  $h = 1$ .

Les 5 solutions ainsi trouvées sont donc les fractions 1, 2, 3 du tableau 3.22, plus les fractions 4 et 5 reportées dans le tableau 3.23. Compte tenu de la façon dont a été effectuée

	Relations de définition génératrices	Mots de définition	Profil
4	$F = ABCD \quad G = BCDE$	<b>1</b> $ABCDF \quad BCDEG \quad AEF G$	$4_1 5_2$
5	$F = ABC \quad G = CDE$	<b>1</b> $ABCF \quad CDEG \quad ABDEFG$	$4_3$

TAB. 3.23 – Fractions  $2^{7-2}$  générées en plus de celle du tableau 3.22

la recherche, ces 5 solutions ne peuvent se déduire les unes des autres par une permutation échangeant entre eux soit les 5 facteurs de base, soit les 2 facteurs définis. Mais cela n'interdit pas que l'on puisse passer de l'une à l'autre, quand elles ont même profil de longueur des mots, par une permutation des 7 lettres. Il est en fait facile de vérifier que la permutation  $(C,F)(A,D)$ , qui échange  $C$  et  $F$  d'une part,  $A$  et  $D$  de l'autre, transforme la fraction 2 en la fraction 4 et, de même, que la permutation circulaire  $(C,F,G)$ , qui envoie  $C$  sur  $F$ ,  $F$  sur  $G$  et  $G$  sur  $C$ , transforme la fraction 1 en la fraction 5. Les seuls trois types de fraction sont donc ceux donnés par le tableau 3.22.

Le paragraphe 3.6.3 explicite, en s'appuyant sur cet exemple, la procédure pour tester l'équivalence de deux fractions. Cette procédure est un point clé dans la méthode de Draper et Mitchell [1967] qui permet une recherche automatique efficace des différents types de fraction d'une taille donnée.

Faisons l'hypothèse que les interactions de trois facteurs ou plus sont nulles. On obtient les effets confondus avec une interaction de deux facteurs en la multipliant par les produits de définition. Par exemple, dans la fraction 1, les effets confondus avec  $e(AB)$  sont  $e(ABABCDEF) = e(CDEF) = 0$ ,  $e(ABABCG) = e(CG)$ ,  $e(ABDEFG) = 0$ .

Comme la multiplication d'un produit de deux lettres par un produit de 5 lettres laisse subsister au moins trois lettres, il n'y a à tenir compte dans la recherche des effets confondus que des mots de définition de 4 lettres.

La solution 2 comporte un seul produit de 4 lettres  $CDEG$ . Ce produit conduit à 3 paires d'interactions confondues qui sont  $(CD, EG)$ ,  $(CE, DG)$ ,  $(CG, DE)$ . Il y a donc dans cette solutions  $21 - 6 = 15$  interactions non confondues.

La solution 1 comporte 2 produits de 4 facteurs  $ABCG$ ,  $DEFG$  qui n'ont en commun qu'une lettre. Chacun de ces produits conduit à trois paires d'interactions confondues et il y a donc dans cette fraction 12 interactions confondues et  $21 - 12 = 9$  non confondues.

Enfin, la solution 3 comporte 3 produits de 4 lettres  $ABCF$ ,  $BCDG$ ,  $ADFG$ . Deux quelconques de ces trois produits ont 2 lettres en commun. Chacun d'eux induit la confusion de 6 interactions. Mais compte tenu de ce que le second a une interaction en commun avec le premier et le troisième une en commun avec chacun des deux autres, le nombre d'interactions confondues est  $6 + 5 + 4 = 15$  et il reste 6 interactions non confondues.

Il est manifeste que la fraction 2, qui comprend le nombre minimal de mots de définition de 4 lettres, est préférable aux deux autres. Pour tirer le meilleur parti de cette fraction, les lettres  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $G$  du mot de 4 lettres, dont les interactions sont confondues entre elles, sont associées aux facteurs présumés les moins actifs et ayant donc le moins de chance d'interagir.

Une telle fraction est appelée fraction d'*aberration minimale* [Fries et Hunter, 1980]. Plus généralement, une fraction régulière  $2^{h-m}$  est dite d'aberration minimale si

1. elle est de résolution maximale  $R$ ,
2. son nombre  $W_R$  de mots de définition de longueur  $R$  est minimal parmi les fractions de résolution  $R$ ,
3. son nombre  $W_{R+1}$  de mots de définition de longueur  $R + 1$  est minimal parmi les fractions de résolution  $R$  qui ont  $W_R$  mots de longueur  $R$ ,
4. etc ...

L'exemple précédent suggère, en l'absence d'indications précises sur les importances respectives des interactions, de choisir une fraction d'aberration minimum.

Malheureusement, l'argument principal donné par Fries et Hunter pour justifier ce choix ne tient pas. On a vu que dans une fraction de résolution  $R$ , les effets principaux se confondent avec des interactions de  $R - 1$  facteurs au moins, les interactions de 2 facteurs avec des interactions de  $R - 2$  facteurs au moins, etc ... Pour Fries et Hunter, l'aberration minimum entraînerait automatiquement que le nombre d'effets principaux confondus avec des interactions d'exactly  $R - 1$  facteurs est minimum, que le nombre d'interactions de 2 facteurs confondus avec des interactions d'exactly  $R - 2$  facteurs est minimum, etc ... Le tableau 3.24 montre que la situation est plus compliquée. Il donne deux fractions régulières  $2^{9-4}$  de résolution 4 et précise pour chacune d'elles, le profil de longueur des mots ainsi que les groupes d'interactions de deux facteurs confondues entre elles. Franklin [1984], ainsi que Chen et Wu [1991], ont montré que la première, de profil  $(4_6, 5_8, 8_1)$ , est d'aberration minimale. Elle confond cependant entre elles les 28 interactions où n'apparaît pas le facteur  $A$ , alors que la seconde, de profil  $(4_7, 5_7, 9_1)$ , ne confond entre elles que 21 interactions n'impliquant ni  $A$ , ni  $F$ . Ce fait avait déjà été noté par Brownlee *et al* [1948]. Leur article, le premier à proposer des tables de fractions  $2^{h-m}$ , propose donc comme fraction 1/16 pour 32 unités une fraction équivalente à la fraction 2, de profil  $4_7 5_7 9_1$  et non la fraction d'aberration minimum de profil  $4_6 5_8 8_1$  (on peut passer de la fraction 2 du tableau 3.24 à la fraction de Brownlee par la permutation  $(A, I, C, F, H, B, G)(D, E)$  suivi du remplacement de la lettre  $I$  par la lettre  $J$ ). C'est également la fraction de profil  $4_7 5_7 9_1$  qui est proposée dans les tables du *National Bureau of Standards* [1957].

Franklin [1984] a introduit un autre critère d'optimalité, basé sur les moments des longueurs des mots de définition. Si  $W_i$  est le nombre de mots de longueur  $i$  ( $W_0 = 1$ ), le

	fraction 1	fraction 2
relations de définition	$F = ABCD \quad G = ABCE$ $H = ABDE \quad I = ACDE$	$F = ABCD \quad G = BCE$ $H = BDE \quad I = CDE$
Mots de définition	$BCHI, BDGI, BEFI, CDGH, CEFH,$ $DEFG, ABCDF, ABCEG, ABDEH,$ $ABFGH, ACDEI, ACFG, ADFHI,$ $AEGHI, BCDEFGHI$	$BCEG, BCHI, BDEH, BDGI, CDEI,$ $CDGH, EGHI, ABCDF, ABEFI,$ $ABFGH, ACEFH, ACFG, ADEFG,$ $ADFHI, BCDEFGHI$
Longueur des mots	$W_4 = 6, W_5 = 8, W_8 = 1 \quad (4_6 5_8 8_1)$	$W_4 = 7, W_5 = 7, W_9 = 1 \quad (4_7 5_7 9_1)$
Interactions confondues	$(BC, HI), (BH, CI), (BD, GI),$ $(BG, DI), (BE, FI), (BF, EI),$ $(CD, GH), (CG, DH), (CE, FH),$ $(CF, EH), (DE, FG), (DF, EG),$ $(BI, CH, DG, EF)$	$(BC, EG, HI), (BD, GI, EH),$ $(CD, EI, GH), (BE, CG, DH),$ $(CE, BG, DI), (DE, CI, BH), (DG, BI, CH)$
Moments des longueurs	$M_0 = 16, \quad M_1 = 72, \quad M_2 = 360,$	$M_0 = 16, \quad M_1 = 72, \quad M_2 = 368,$

TAB. 3.24 – Comparaison de deux fractions  $2^{9-4}$  régulières de résolution 4

moment d'ordre  $j$  est défini par

$$M_j = \sum_{i=0}^h i^j W_i. \quad (3.36)$$

On a fait figurer au bas du tableau 3.24 les moments d'ordre 0, 1, 2. Le moment d'ordre 0 est le nombre total de mots de définition, soit  $2^m$  pour une fraction  $2^{h-m}$  (en incluant le mot **1** de longueur 0) :

$$M_0 = 2^m \quad (3.37)$$

Nous verrons au paragraphe 3.6.2 que si un facteur figure au moins une fois dans les produits de définition, il figure exactement dans la moitié de ces produits, soit  $2^{m-1}$  fois pour une fraction  $2^{h-m}$ . Le moment d'ordre 1, somme des longueurs des mots, est donc  $M_1 = (h-f)2^{m-1}$  où  $f$  est le nombre de facteurs n'apparaissant dans aucun mot de définition. Si  $f = 0$ , c'est-à-dire si les  $h$  facteurs apparaissent dans les mots de définition,  $M_1$  prend la valeur maximale

$$M_1 = h2^{m-1} \quad (3.38)$$

et la longueur moyenne d'un mot est

$$M_1/M_0 = h/2 \quad (3.39)$$

Plus la dispersion des longueurs de mots autour de cette valeur moyenne est faible, plus le nombre de mots de longueur extrême, donc en particulier le nombre de mots de longueur minimale  $R$ , tend à être petit. Cette dispersion est mesurable par la variance des longueurs des mots de définition

$$V = \frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad (3.40)$$

Elle est d'autant plus faible que  $M_2$  est petit. Parmi les fractions où tous les facteurs apparaissent dans les mots de définition et pour lesquelles  $M_1$  prend donc sa valeur maximum donnée par (3.38), il est alors naturel de sélectionner celles qui minimisent  $M_2$ . S'il y en a plusieurs, Franklin propose de sélectionner celles d'entre elles qui maximisent  $M_3$ . Une grande valeur de  $M_3$  indique en effet une distribution asymétrique avec une queue de distribution allongée du côté des mots de grande longueur. Parmi les fractions qui maximise  $M_3$ , il retient ensuite celles qui minimisent  $M_4$ , etc ...

Nous verrons au paragraphe 3.6.4 que la minimalité de  $M_2$  se traduit par une propriété caractéristique facile à reconnaître des relations de définition génératrices, ce qui confère un certain intérêt pratique à ce critère.

Cependant, de même que le critère d'aberration minimum, la minimalité de  $M_2$  ne garantit pas en résolution  $R = 4$  que le nombre d'interactions de deux facteurs confondus est le plus petit possible. Ainsi, la propriété caractéristique qui vient d'être mentionnée permet de montrer que la fraction 1 du tableau 3.24 minimise  $M_2$ . Elle confond pourtant davantage d'interactions que la fraction 2 qui a un  $M_2$  plus grand.

Les fractions d'aberration minimale ou à moments optimaux ne sont donc pas nécessairement les meilleures si l'objectif est de minimiser en résolution 4 le nombre d'interactions de 2 facteurs confondus entre elles, ou encore en résolution 3 le nombre d'effets principaux confondus avec des interactions de 2 facteurs. Mais ce sont néanmoins de bonnes fractions qui ont aussi l'avantage d'être tabulées dans tous les cas où le fractionnement n'excède pas  $1/32$  [Chen et Wu, 1991], [Chen, 1992] et dans plusieurs autres cas [Franklin, 1984].

**Exemple 3.1** . On veut étudier l'influence sur la cohésion du fromage de Comté frais de 11 facteurs. On peut fabriquer pour cela 64 microcomtés.

Les tables de Chen ou Franklin montrent que le profil de longueur des mots qui minimise l'aberration d'une fraction  $2^{11-5}$  est  $(4_4, 5_{14}, 6_8, 8_3, 9_2)$ . Les moments correspondants sont

$$M_0 = 32, \quad M_1 = 176, \quad M_2 = 1056. \quad (3.41)$$

Ce profil est obtenu pour la fraction définie par

$$G = BCDEF, \quad H = ACDEF, \quad I = ABDE, \quad J = ABCE, \quad K = ABCD. \quad (3.42)$$

Les 4 mots de définition de longueur 4 de ce plan sont

$$DEJK, \quad CEIK, \quad CDIJ, \quad ABGH. \quad (3.43)$$

Les groupes d'interactions de deux facteurs confondus entre elles sont donc

$$(AB, GH), (EJ, DK), (CK, EI), (CD, IJ), (CJ, DI), \\ (CE, IK), (DE, JK), (AH, BG), (BH, AG), (DJ, EK, CI).$$

Il y a au total 21 interactions de 2 facteurs confondus entre elles. Ceci est en fait le plus petit nombre d'interactions de 2 facteurs confondus entre elles dans une fraction ayant

$W_4$	1	2	3	4	5	6	7	$> 7$
$k_2$	6	12	15	21	24	28	21	$\geq 21$

TAB. 3.25 – Nombre minimum d'interactions confondues en résolution 4

4 mots de définition de longueur 4. Plus généralement, on a le résultat suivant qui se démontre par énumération des différents cas.

**Proposition 3.7** *Le nombre minimum  $k_2$  d'interactions de 2 facteurs confondues entre elles dans une fraction régulière  $2^{h-m}$  ayant  $W_4$  mots de longueur 4 est donné, pour  $W_4 \leq 7$ , par le tableau 3.25. Pour  $W_4 > 7$ , on a  $k_2 \geq 21$ .*

Le dispositif  $2^{11-5}$  donné rend donc minimum le nombre d'interactions de deux facteurs confondues entre elles. Cependant, les mots de 4 lettres reportés en (3.43) contiennent 10 des 11 facteurs. Chacun de ces 10 facteurs apparaît donc au minimum dans trois interactions confondues et son effet principal se confond avec au minimum une interaction de trois facteurs. Si on pense qu'il y a plusieurs facteurs très importants, que l'on veut pouvoir estimer toutes les interactions où ils apparaissent et disposer d'une estimation aussi robuste que possible de leurs effets principaux, on peut préférer un plan ayant peut-être davantage de mots de 4 lettres mais où le nombre de lettres apparaissant dans ces mots est plus faible. Une recherche automatique telle que celle effectuée par le programme PLANOR montre qu'on peut réduire à 8 le nombre de lettres figurant dans les mots de 4 lettres et permet d'obtenir les deux types de fraction du tableau 3.26 qui rendent estimables toutes les interactions entre l'un des 3 facteurs  $A, B, C$  et chacun des 10 autres facteurs. Les deux fractions confondent toutes deux 28 interactions de deux facteurs. Cependant la seconde apparaît préférable parce que les groupes d'interactions confondues y sont de plus petite taille, ce qui peut faciliter beaucoup l'interprétation si les f.e.b correspondantes sont significatives. En contrepartie, le nombre de degrés de liberté résiduels, correspondant aux f.e.b qui n'incluent que des interactions de 3 facteurs ou plus, est inférieur dans la fraction 2. Il y a 12 degrés de liberté pour estimer la variance résiduelle dans la fraction 2 contre 18 dans la fraction 1. Mais cette différence n'apparaît pas fondamentale, surtout si l'on utilise pour l'interprétation les techniques décrites au paragraphe 3.3.

### Remarques.

- Le mode de recherche utilisé par PLANOR ne garantit pas que les deux types de fraction obtenus sont les seuls possibles.
- Les trois facteurs  $A, B, C$  préservés figurent parmi les facteurs de base. La recherche échoue si l'on demande que soit préservés trois des facteurs définis ( $G, H, I$  par exemple)

Pour rechercher des fractions régulières optimales pour l'un des critères précédemment mentionnés, la méthode la plus naïve consiste à examiner tous les ensembles de relations de définition possible et à évaluer pour chacun d'eux le critère étudié. Cette méthode est cependant assez lourde. Reprenons l'exemple de la fraction  $2^{11-5}$ . Chacun des 5 facteurs  $G, H, I, J, K$  peut a priori être défini sous la forme  $A^a B^b C^c D^d E^e F^f$  de  $2^6$  façons différentes,

	Type 1	Type 2
relations de définition	$G = ABCDEF \quad H = ABCE$ $I = ABCF \quad J = DEF$ $K = ABCD$	$G = CDEF \quad H = ABCF$ $I = ABDEF \quad J = ABCE$ $K = ABCD$
Mots de longueur 4	$DHIJ; EGHJ; DEGI; EFHI; DEFJ;$ $FGIJ; DFGH; EIJK; DEHK; GHIK;$ $DGJK; FHJK; DFIK; EFGK$	$EGIJ; EFHJ; FGHJ;$ $DEJK; DGJK; DFHK$
Longueur des mots	$W_4 = 14, W_5 = 4, W_7 = 8$ $W_8 = 1, W_9 = 4$ $(4_{14}5_47_88_{19}4)$	$W_4 = 6, W_5 = 12, W_6 = 8$ $W_8 = 1, W_9 = 4$ $(4_65_{12}6_88_{19}4)$
Interactions confondues	$(EH, GJ, FI, DK), (DE, GI, FJ, HK),$ $(DH, IJ, FG, EK), (DF, EJ, GH, IK),$ $(DI, HJ, EG, FK), (EF, HI, DJ, GK),$ $(FH, EI, DG, JK)$	$(EJ, GI, FH, DK), (DE, JK),$ $(GH, FI), (HI, FG), (DJ, EK),$ $(DF, HK), (EI, GJ), (IJ, EG),$ $(DH, FK), (EF, HJ), (GK, DI),$ $(IK, DG), (FJ, EH)$
Effets non confondus	$A; B; C; D; E; F; G; H; I; J; K; AB; AC; AD; AE; AF; AG; AH; AI; AJ; AK$ $BC; BD; BE; BF; BG; BH; BI; BJ; BK; CD; CE; CF; CG; CH; CI; CJ; CK$	
Moments des longueurs	$M_0 = 32, \quad M_1 = 176, \quad M_2 = 1104,$	$M_0 = 32, \quad M_1 = 176, \quad M_2 = 1072,$
d.d.l résiduels	18	12

TAB. 3.26 – Fractions  $2^{11-5}$  de résolution 4 privilégiant les 3 facteurs  $A, B, C$

correspondant aux  $2^6$  jeux d'exposants  $a, b, c, d, e, f$  possibles. Au total, il y a donc  $(2^6)^5 = 2^{30}$  ensembles de relations de définition à étudier. Si on se limite aux plans de résolution 4, les produits en question doivent comporter au moins trois facteurs et on peut donc limiter l'exploration pour chaque facteur défini aux 42 jeux d'exposants comprenant au moins 3 exposants non nuls. Il reste alors  $42^5$  ensembles de relation de définition à examiner. La tâche n'est sans doute pas insurmontable dans ce cas de figure, mais il est clair que l'ajout de quelques autres facteurs définis la rendrait rapidement impraticable.

Ceci a amené Draper et Mitchell, dans leur recherche du nombre maximum de facteurs introduisibles en résolution 5 avec  $2^8$  ou  $2^9$  unités, à adopter une procédure séquentielle de construction ne retenant à chaque pas que des fractions non équivalentes. C'est sensiblement cette procédure qui a été utilisée pour obtenir l'ensemble des trois fractions  $2^{7-2}$  de résolution 4 figurant dans le tableau 3.22.

Un point fondamental pour mettre en oeuvre cette procédure est de pouvoir déterminer qu'une fraction nouvelle est équivalente à une déjà trouvée et n'a donc pas à être prise en compte. Ce test d'équivalence, explicité au paragraphe 3.6.3, utilise une notation matricielle des relations de définition qui est détaillée au paragraphe 3.6.2.

Utilisant une procédure similaire à celle de Draper et Mitchell, Chen J. *et al* [1993] ont établi un catalogue des différents types de fraction  $2^{h-m}$  pour  $N \leq 64$  et  $3^{h-m}$  pour  $N = 27$ . Leur algorithme pour tester l'équivalence semble plus lourd que celui de Draper et Mitchell [1967] (dont ces auteurs semblent ignorer l'existence) et n'est donc pas considéré ici.

### 3.6.2 Notations matricielles des relations de définition

En notation additive, les relations de définition (3.18) prennent la forme

$$\begin{aligned} E &= A+B+C \pmod{2} \\ F &= 1+B+C+D \pmod{2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

qui s'écrivent aussi sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\Gamma} \times \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \pmod{2} \quad (3.45)$$

Le vecteur de droite définit l'unité expérimentale, celui de gauche donne les valeurs des deux facteurs définis. Cette écriture peut être complétée pour faire apparaître à gauche le vecteur définissant le traitement :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mathbf{t}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ Z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \pmod{2} \quad (3.46)$$

Les relations (3.27) définissant une fraction 1/3 en 3 blocs peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} D \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \pmod{3} \quad (3.47)$$

L'intérêt de cette notation matricielle est de permettre l'usage de l'arsenal classique de l'algèbre linéaire. On sait en effet que l'addition et la multiplication modulo  $p$ , où  $p$  est un nombre premier, font de l'ensemble  $\{0,1,\dots,p-1\}$  un corps que l'on note ici  $\mathcal{F}_p$ . La multiplication matricielle s'effectue donc avec les opérations de  $\mathcal{F}_2$  dans (3.45) et celles de  $\mathcal{F}_3$  dans (3.47).

Considérons plus en détail le premier exemple avec des facteurs à 2 niveaux. Les  $2^4$  unités expérimentales forment un espace vectoriel de dimension 4 sur  $\mathcal{F}_2$  :  $U = \mathcal{F}_2^4$ . Les  $2^6$  traitements forment de même un espace vectoriel  $T = \mathcal{F}_2^6$  de dimension 6. La fraction définie par (3.46) est le sous-espace affine des éléments de la forme  $\mathbf{t}_1 + Z\mathbf{u}$  où  $\mathbf{u}$  décrit  $U$ . Ce sous-espace affine est le translaté, par la translation de vecteur  $\mathbf{t}_1$ , du sous-espace vectoriel  $\text{Im } Z = \{Z\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}$ . On montre aisément que le sous-espace  $S$  de  $T$  formé des

vecteurs dont les coordonnées associées aux facteurs de base sont nulles est supplémentaire de  $\text{Im } Z$ . Ces vecteurs sont ici les 4 vecteurs

$$\mathbf{t}_0 = (0,0,0,0,0)', \mathbf{t}_1 = (0,0,0,0,0,1)', \mathbf{t}_2 = (0,0,0,0,1,0)', \mathbf{t}_3 = (0,0,0,0,1,1)'$$

ayant leurs 4 premières coordonnées nulles et donc  $S = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$ . Par suite, les sous-espaces affines parallèles à  $\text{Im } Z$  sont les 4 sous-espaces  $\mathbf{t}_0 + \text{Im } Z$ ,  $\mathbf{t}_1 + \text{Im } Z$ ,  $\mathbf{t}_2 + \text{Im } Z$ ,  $\mathbf{t}_3 + \text{Im } Z$ , qui coïncident avec les 4 fractions définies par (3.26). Le sous-espace  $\text{Im } Z$  est appelé *fraction principale* et  $Z$  *matrice génératrice* de la fraction.

Il est facile de vérifier qu'aux  $2^8$  choix possibles pour la matrice  $\Gamma$  apparaissant à droite de (3.45) correspondent des fractions principales distinctes, c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels  $\text{Im } Z$  distincts. Mais tous les sous-espaces vectoriels de dimension 4 de  $T$  ne peuvent être obtenus en prenant  $A, B, C, D$  comme facteurs de base et  $E$  et  $F$  comme facteurs définis, puisque les fractions ainsi définies ne peuvent satisfaire de contrainte du type  $aA + bB + cC + dD = 0$ . Pour décrire tous les sous-espaces vectoriels de dimension 4, il faut donc utiliser plusieurs systèmes de facteurs de base. Mais il y a alors des redondances, c'est-à-dire des sous-espaces qui peuvent être obtenus à partir de plusieurs systèmes de facteurs de base. Ainsi, la fraction définie par (3.44) peut aussi être définie, en prenant  $A, B, E, F$  comme facteurs de base, par

$$\begin{aligned} C &= A + B + E \pmod{2}, \\ D &= 1 + A + E + F \pmod{2}. \end{aligned}$$

Laycock et Rowley [1995] ont proposé une façon ingénieuse de décrire tous les sous-espaces vectoriels de dimension  $s$  de  $\mathcal{F}_p^h$  en évitant toute redondance. Ils numérotent les facteurs de 1 à  $h$  et décrivent ensuite tous les sous-ensembles possibles  $j_1 < \dots < j_s$  de facteurs de base. Pour chacun de ces sous-ensembles, ils ne retiennent pour définir chaque autre facteur  $i$ ,  $i \notin \{j_1, \dots, j_s\}$ , que les combinaisons linéaires des facteurs de base de numéro inférieur à  $i$ .

Dans l'exemple considéré, on numérote les facteurs dans l'ordre alphabétique, 1 pour  $A$ , 2 pour  $B$ , ..., 6 pour  $F$ . Les  $C_6^4 = 15$  ensembles de facteurs de base sont ensuite décrits dans un ordre systématique.

- **Ensemble 1**:  $A, B, C, D$ . Si on ne se préoccupe pas de la translation, les facteurs définis  $E, F$  peuvent être définis de  $2^8$  façons possibles selon les valeurs 0 ou 1 apparaissant à la place des  $\star$  ci-dessous

$$\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}.$$

- **Ensemble 2**:  $A, B, C, E$ . Le facteur  $E$  ne doit pas apparaître dans la définition de  $D$ . Il y a donc  $2^7$  choix possibles obtenus en remplaçant les  $\star$  par 0 ou 1 ci-dessous

$$\begin{pmatrix} D \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{pmatrix}.$$

– etc ...

Le tableau 3.27 décrit les solutions retenues pour chaque système de facteurs de base. Les blancs sont à remplacer par des 0, les  $\star$  par 0 ou 1.

$\begin{array}{c} A \ B \ C \ D \\ E \ \star \ \star \ \star \ \star \\ F \ \star \ \star \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} A \ B \ C \ E \\ D \ \star \ \star \ \star \\ F \ \star \ \star \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} A \ B \ C \ F \\ D \ \star \ \star \ \star \\ E \ \star \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} A \ B \ D \ E \\ C \ \star \ \star \\ F \ \star \ \star \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} A \ B \ D \ F \\ C \ \star \ \star \\ E \ \star \ \star \ \star \end{array}$
$\begin{array}{c} A \ B \ E \ F \\ C \ \star \ \star \\ D \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} A \ C \ D \ E \\ B \ \star \\ F \ \star \ \star \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} A \ C \ D \ F \\ B \ \star \\ E \ \star \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} A \ C \ E \ F \\ B \ \star \\ D \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} A \ D \ E \ F \\ B \ \star \\ C \ \star \end{array}$
$\begin{array}{c} B \ C \ D \ E \\ A \\ F \ \star \ \star \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} B \ C \ D \ F \\ A \\ E \ \star \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} B \ C \ E \ F \\ A \\ D \ \star \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} B \ D \ E \ F \\ A \\ C \ \star \end{array}$	$\begin{array}{c} C \ D \ E \ F \\ A \\ B \end{array}$

TAB. 3.27 – Génération des fractions principales  $2^{6-2}$

Le nombre total de solutions est

$$651 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 .$$

Ce décompte des sous-espaces vectoriels de dimension 4 peut se faire d'une manière plus simple. Pour définir un sous-espace de dimension 4 de  $\mathcal{F}_2^6$ , on fait le choix de 4 générateurs indépendants. Il y a  $2^6 - 1$  façons de sélectionner le premier générateur, puis  $2^6 - 2$  façons de sélectionner le second hors du sous-espace engendré par le premier,  $2^6 - 2^2$  façons de sélectionner le 3ème hors du sous-espace engendré par les 2 premiers et enfin  $2^6 - 2^3$  façons de sélectionner le 4ème hors du sous-espace engendré par les 3 premiers, ce qui fait un total de  $(2^6 - 1)(2^6 - 2)(2^6 - 2^2)(2^6 - 2^3)$  quadruplets de générateurs. Un raisonnement analogue montre que chaque sous-espace de dimension 4 peut être généré à partir de  $(2^4 - 1)(2^4 - 2)(2^4 - 2^2)(2^4 - 2^3)$  quadruplets de générateurs. Le nombre total de sous-espaces est donc

$$\frac{(2^6 - 1)(2^6 - 2)(2^6 - 2^2)(2^6 - 2^3)}{(2^4 - 1)(2^4 - 2)(2^4 - 2^2)(2^4 - 2^3)} = \frac{(2^6 - 1)(2^5 - 1)(2^4 - 1)(2^3 - 1)}{(2^4 - 1)(2^3 - 1)(2^2 - 1)(2 - 1)} = 651 .$$

On notera que lorsque les facteurs ont des rôles symétriques, on s'intéresse aux fractions à une permutation des facteurs près. On peut alors se limiter pour la recherche d'une fraction à un unique système de facteurs de base, auquel on peut toujours se ramener par permutation des facteurs.

Dans les cas non symétriques, il est souvent également possible de montrer que l'emploi d'un système particulier de facteurs de base n'apporte aucune restriction réelle au choix de la fraction en utilisant le résultat suivant.

**Proposition 3.8** *Etant donné une fraction régulière  $2^{h-m}$ , soit  $\mathcal{A}$  un sous-ensemble de facteurs tels qu'il n'existe pas de relation linéaire entre eux sur la fraction. Alors, on peut trouver un ensemble de facteurs de base incluant  $\mathcal{A}$  et permettant de définir la fraction.*

La formulation de la proposition suppose que les facteurs sont codés de façon additive. Avec un codage multiplicatif, les relations linéaires deviennent des produits.

On verra une application intéressante au paragraphe 3.8. Notons déjà qu'en résolution 4, cette proposition montre que n'importe quel triplet de facteurs peut être inclus a priori dans l'ensemble des facteurs de base. De même, tout ensemble de facteurs dont on veut voir apparaître sur la fraction toutes les combinaisons de niveaux peut être inclus d'office dans l'ensemble des facteurs de base.

**Démonstration.** Si  $Z$  est la matrice génératrice  $h \times (h - m)$  de la fraction, la condition implique l'indépendance des lignes de  $Z$  associées aux facteurs de  $\mathcal{A}$ . Ces lignes peuvent alors être complétées par d'autres de façon à former une sous-matrice carrée  $Y$  inversible de dimension  $h - m$ . Le produit  $ZY^{-1}$  génère la fraction et contient une sous matrice  $\mathbf{I}$  à la place de  $Y$ , ce qui montre que les facteurs correspondants peuvent être pris comme facteurs de base.  $\square$

Le sous-espace  $\text{Im } Z$  de l'exemple peut être aussi défini par les égalités

$$\begin{aligned} A+B+C+ \quad E &= 0 \\ B+C+D+ \quad F &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\text{soit} \quad \Delta \quad \mathbf{t} \quad = \quad 0$$

en notant  $\Delta$  la matrice  $2 \times 6$  figurant à gauche. Ce sous-espace est donc aussi le noyau  $\text{Ker } \Delta$  de la matrice  $\Delta$  :

$$\text{Im } Z = \text{Ker } \Delta = \{\mathbf{t} | \Delta \mathbf{t} = 0\} \quad (3.50)$$

L'ensemble des effets factoriels  $A^a B^b C^c D^d E^e F^f$  peut aussi être représenté par l'espace vectoriel  $\mathcal{F}_2^6$  des vecteurs d'exposants  $(a, b, c, d, e, f)$  associés. Cet espace est noté  $T^*$  et appelé le *dual de  $T$*  ou *espace des effets factoriels*. Avec cette représentation, les effets confondus avec la moyenne  $\mathbf{1}$ ,  $ABCE$ ,  $BCDF$ ,  $ADEF$  sont les vecteurs engendrés par les lignes de  $\Delta$  (tableau 3.28). Pour cette raison, on appelle  $\Delta$  la *matrice génératrice des effets confondus avec la moyenne*, ou encore la matrice génératrice des mots de définition (des relations de définition, des contrastes de définition). La matrice formée de l'ensemble des lignes engendrées par  $\Delta$  est notée ici  $\overline{\Delta}$ . Ces lignes constituent un sous-espace vectoriel  $K$  de  $T^*$  appelé *espace des effets confondus avec la moyenne*, ou espace des mots (contrastes) de définition. L'espace  $K$  est aussi l'espace image  $\text{Im } \Delta'$  de la matrice transposée.

Dans le cas général d'une fraction  $2^{h-m}$ , l'espace  $K = \text{Im } \Delta'$  des effets confondus avec la moyenne peut être représenté comme sous-espace de dimension  $m$  de l'espace vectoriel  $T^* = \mathcal{F}_2^h$  des effets factoriels.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Delta} = \begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E & F & \text{mots} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & & & & & & & \mathbf{1} \\ & & & & & & & A B C \quad E \\ & & & & & & & B C D \quad F \\ & & & & & & & A \quad D E F \end{array}$$

TAB. 3.28 – Matrice génératrice des effets confondus avec la moyenne

Pour illustrer l'intérêt de cette représentation, considérons l'application linéaire  $\phi : K \rightarrow \mathcal{F}_2$  qui coïncide avec la projection sur la première coordonnée, i.e. telle que  $\phi(a,b,\dots) = a$ . Son image est soit  $\phi(K) = \{0\}$ , soit  $\phi(K) = \mathcal{F}_2$ . Dans le premier cas, le facteur  $A$  n'apparaît dans aucun mot de définition, dans le second il apparaît dans la moitié des mots constituée par l'hyperplan affine  $\phi^{-1}(1)$ . On montre de même que chaque facteur qui figure dans un mot au moins figure dans la moitié des mots de définition. On peut en déduire la formule (3.38).

De même soit  $\psi : K \rightarrow \mathcal{F}_2^2$  l'application linéaire qui coïncide avec la projection sur les deux premières coordonnées i.e. telle que  $\psi(a,b,c,\dots) = (a,b)$ . Si son image est  $\mathcal{F}_2^2$ , les 4 images réciproques  $\psi^{-1}(0,0)$ ,  $\psi^{-1}(1,0)$ ,  $\psi^{-1}(0,1)$ ,  $\psi^{-1}(1,1)$  sont 4 sous-espaces affines parallèles de dimension  $m - 2$ . Le premier est formé des mots ne contenant ni  $A$ , ni  $B$ , le second des mots contenant  $A$  mais pas  $B$ , le troisième des mots contenant  $B$  mais pas  $A$ , le quatrième des mots contenant  $A$  et  $B$ . Ces 4 classes ont donc le même nombre  $2^m/4$  d'éléments. Si l'image de  $\psi$  est un sous-espace de dimension 1 de  $\mathcal{F}_2^2$ , deux des trois dernières classes sont vides et les deux autres contiennent la moitié des mots de définition. Par exemple si l'image est le sous-espace  $\{(0,0),(1,1)\}$  engendré par  $(1,1)$ , la moitié des mots de définition contiennent  $AB$  et l'autre moitié ne contient ni  $A$ , ni  $B$ .

Enfin soit  $\xi : K \rightarrow \mathcal{F}_2$  l'application linéaire faisant correspondre à chaque vecteur de  $K$  la somme de ses coordonnées modulo 2. L'image est 0 si le mot est de longueur paire, 1 s'il est de longueur impaire. Si  $\xi(K) = \{0\}$ , tous les mots sont de longueur paire. On dit alors qu'il s'agit d'une *fraction paire*. Dans le cas contraire, si  $\xi(K) = \mathcal{F}_2$ , la moitié des mots sont de longueur paire, l'autre moitié de longueur impaire. On dit alors qu'il s'agit d'une *fraction impaire*.

Les deux matrices  $Z$  et  $\Delta$  sont écrites ci-dessous sous une forme qui fait clairement apparaître la façon dont on passe de l'une à l'autre.

$$Z = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & \end{array} \right] = \Delta$$

Si l'on note  $\Gamma$  la matrice apparaissant dans (3.45),

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$Z = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \Gamma \end{pmatrix}, \quad \Delta = (\Gamma, \mathbf{I}).$$

On remarque que  $Z' = (\mathbf{I}, \Gamma')$  se déduit de  $\Delta' = \begin{pmatrix} \Gamma' \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}$  comme  $\Delta$  à partir de  $Z$  et on a donc l'analogie de (3.50)

$$\text{Im } \Delta' = \text{Ker } Z'. \quad (3.51)$$

Autrement dit l'espace  $\text{Im } \Delta'$  des effets confondus avec la moyenne est aussi l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{x} = (a, b, c, d, e, f)'$  tels que  $Z'\mathbf{x} = 0$ .

La résolution 4 de la fraction considérée se traduit par le fait que tous les éléments non nuls  $\mathbf{x}$  de  $\text{Im } \Delta'$  ont au moins 4 coordonnées non nulles, ou de façon équivalente par le fait que trois colonnes quelconques de  $Z'$  sont toujours indépendantes. De façon plus générale, on a

**Proposition 3.9** *Soit  $Z$  la matrice génératrice d'une fraction régulière. Cette fraction est de résolution  $R$  si  $R - 1$  colonnes quelconques de  $Z'$  sont indépendantes.*

On retrouve ainsi que le nombre maximum de facteurs d'une fraction régulière à  $2^s$  unités de résolution 3 est  $2^s - 1$ . La matrice  $Z'$  a alors  $s$  lignes et deux de ses colonnes doivent être indépendantes, c'est-à-dire ici distinctes et non nulles. Le nombre maximum de telles colonnes est obtenu en prenant toutes les  $2^s - 1$  colonnes de  $\mathcal{F}_2^s$ .

### 3.6.3 Equivalence entre fractions

Un point fondamental dans l'algorithme de recherche automatique des différents types de fraction  $2^{h-m}$  utilisé par Draper et Mitchell est le diagnostic d'équivalence entre fractions. Pour l'explicitier, considérons à nouveau les fractions 2 et 4 des tableaux 3.22 et 3.23.

Les 4 mots de définition, notés  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  pour la fraction 2,  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  pour la fraction 4, sont représentés sous forme de matrices  $4 \times 7$ , notées respectivement  $\overline{\Delta}$  et  $\overline{\Lambda}$ , au bas du tableau 3.29. Les lignes de ces matrices sont engendrées par celle des matrices génératrices  $\Delta, \Lambda$  figurant au haut du tableau. Dans la suite, on fera référence à ces matrices pour désigner les deux fractions. La longueur de chaque mot est reportée entre parenthèse à droite de la ligne associée.

Dans chaque fraction, les facteurs peuvent être classés en sous-ensembles correspondant à des colonnes identiques. Ce classement peut être opéré en utilisant seulement les matrices génératrices  $\Delta$  et  $\Lambda$ . Il conduit aux partitions suivantes

$$\begin{aligned} \text{fraction } \Delta: & \{A, B, F\}, \quad \{C, D\}, \quad \{E, G\}, \\ \text{fraction } \Lambda: & \{B, C, D\}, \quad \{A, F\}, \quad \{E, G\}, \end{aligned}$$

fraction 2								fraction 4										
$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$								$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$										
	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$			$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$		
$\Delta_0$	0	0	0	0	0	0	0	(0)		$\Lambda_0$	0	0	0	0	0	0	0	(0)
$\Delta_1$	1	1	1	1	0	1	0	(5)		$\Lambda_1$	1	1	1	1	0	1	0	(5)
$\Delta_2$	0	0	1	1	1	0	1	(4)		$\Lambda_2$	0	1	1	1	1	0	1	(5)
$\Delta_3$	1	1	0	0	1	1	1	(5)		$\Lambda_3$	1	0	0	0	1	1	1	(4)
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Delta}$								$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Lambda}$										

TAB. 3.29 – Recherche d'équivalence entre deux fractions

Si il y a une permutation  $\pi$  des lettres qui transforme la fraction  $\Delta$  dans la fraction  $\Lambda$ , donc les mots de définition de  $\Delta$  en ceux de  $\Lambda$ , elle doit amener la première partition sur la seconde. Elle doit donc transformer  $\{A, B, F\}$  en  $\{B, C, D\}$  et  $\{E, G\}$  soit en  $\{E, G\}$ , soit en  $\{A, F\}$ . La façon précise dont la permutation opère à l'intérieur d'un ensemble de la partition peut être défini arbitrairement car toute permutation des lettres au sein d'un même sous-ensemble laisse invariant le plan.

En fait, si la permutation  $\pi$  existe, elle est complètement déterminée par la façon dont elle transforme les facteurs définis  $F$  et  $G$ . Dans cet exemple particulier, il est même évident que la connaissance de l'image  $\pi G$  de  $G$  suffit à déterminer la façon dont  $\pi$  transforme la partition induite par  $\Delta$ . Mais l'explication plus détaillée qui suit montre comment ce résultat se généralise.

Soit  $\Delta_A, \dots, \Delta_G$  (resp.  $\Lambda_A, \dots, \Lambda_G$ ) les colonnes de  $\Delta$  (resp.  $\Lambda$ ) associées aux facteurs  $A, \dots, G$ . Les colonnes  $\Delta_F$  et  $\Delta_G$  associées aux facteurs définis, sont les vecteurs canonique  $(1,0)'$  et  $(0,1)'$ . Les autres colonnes, associées aux facteurs de base, en sont combinaisons linéaires :

$$\Delta_A = \Delta_B = \Delta_F, \quad \Delta_E = \Delta_G, \quad \Delta_C = \Delta_D = \Delta_F + \Delta_G \quad (3.52)$$

Les mêmes relations linéaires doivent alors exister entre les colonnes correspondantes  $\Lambda_{\pi A}, \dots, \Lambda_{\pi G}$  de  $\Lambda$  :

$$\Lambda_{\pi A} = \Lambda_{\pi B} = \Lambda_{\pi F}, \quad \Lambda_{\pi E} = \Lambda_{\pi G}, \quad \Lambda_{\pi C} = \Lambda_{\pi D} = \Lambda_{\pi F} + \Lambda_{\pi G} . \quad (3.53)$$

La donnée de  $\pi F$  et  $\pi G$  détermine donc ce que doivent être les colonnes de  $\Lambda$  associées aux images  $\pi A, \dots, \pi E$  et détermine donc la façon dont la permutation transforme la partition induite par  $\Delta$ .

★ Montrons que, si  $\pi$  permet de passer d'une fraction à l'autre, il conserve les relations linéaires entre colonnes correspondantes de  $\Delta$  et  $\Lambda$ . Les mots  $\pi\Delta_0, \pi\Delta_1, \pi\Delta_2, \pi\Delta_3$  obtenus en appliquant  $\pi$  aux mots  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  sont alors à l'ordre près les mots  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ . La colonne  $\bar{\Lambda}_{\pi A}$  associée à  $\pi A$  dans  $\bar{\Lambda}$  s'obtient donc en permutant le vecteur des occurrences de  $\pi A$  dans les mots  $\pi\Delta_0, \pi\Delta_1, \pi\Delta_2, \pi\Delta_3$  qui coïncide avec la colonne  $\bar{\Delta}_A$  associée à  $A$  dans  $\Delta$ . Les transformations successives  $\Delta_A \mapsto \bar{\Delta}_A \mapsto \bar{\Lambda}_{\pi A} \mapsto \Lambda_{\pi A}$  sont toutes linéaires et conservent les relations linéaires.

On peut aussi montrer cela de façon plus algébrique en introduisant la matrice  $\Phi$  de la permutation associée à  $\pi$  et les vecteurs canoniques  $\mathbf{e}_A, \dots, \mathbf{e}_G$  associés aux 7 facteurs :

$$\mathbf{e}_A = (1,0,\dots,0)', \dots, \mathbf{e}_G = (0,\dots,0,1)' .$$

Rappelons que  $\Phi \mathbf{e}_A = \mathbf{e}_{\pi A}, \dots, \Phi \mathbf{e}_G = \mathbf{e}_{\pi G}$ . Les deux fractions sont les noyaux  $\text{Ker } \Delta$  et  $\text{Ker } \Lambda$ . La permutation  $\pi$  permet de passer de l'une à l'autre si  $\Phi(\text{Ker } \Delta) = \text{Ker } \Lambda$ . Dans ces conditions,  $\Phi$  induit un isomorphisme  $P$  de  $\text{Im } \Delta$  sur  $\text{Im } \Lambda$  défini par  $P\Delta = \Lambda\Phi$ . On a

$$\Lambda_{\pi A} = \Lambda \mathbf{e}_{\pi A} = \Lambda \Phi \mathbf{e}_A = P\Delta \mathbf{e}_A = P\Delta_A$$

et de même  $\Lambda_{\pi B} = P\Delta_B, \dots, \Lambda_{\pi G} = P\Delta_G$ . Les relations (3.53) se déduisent alors des relations (3.52) en prémultipliant par  $P$ .

Pour chercher une éventuelle permutation faisant passer d'une fraction à l'autre, on est donc amené à rechercher progressivement l'image de chacun des facteurs définis  $F$  et  $G$ .

Le choix est dans cet exemple très restreint. L'image  $\pi F$  appartient nécessairement au sous-ensemble  $\{B, C, D\}$  et peut être choisie arbitrairement dans cet ensemble, par exemple  $\pi F = C$ . L'image  $\pi G$  appartient soit à  $\{E, G\}$ , soit à  $\{A, F\}$  et on peut donc prendre soit  $\pi G = E$ , soit  $\pi G = A$ .

La vérification de la validité du choix peut s'effectuer progressivement. Si  $\pi$  transforme la fraction  $\Delta$  en la fraction  $\Lambda$ , les mots  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  sont à l'ordre près les mots  $\pi\Delta_0, \pi\Delta_1, \pi\Delta_2, \pi\Delta_3$  obtenus en permutant par  $\pi$  les lettres de  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ . En conséquence

1. si  $\pi F = C$ , les mots de  $\Lambda$  contenant  $C$  doivent être en nombre égal aux mots de  $\Delta$  contenant  $F$  et avoir les mêmes longueurs. Cette condition est ici vérifiée puisque  $F$  apparaît dans deux des mots de  $\Delta$  de longueurs respectives 5 et 5 et qu'il en est de même pour  $C$  dans les mots de  $\Lambda$ . On peut donc poursuivre la recherche en examinant les choix possibles pour  $\pi G$ .
2. Si  $\pi F = C$  et  $\pi G = E$ , on peut former 4 groupes de mots pour  $\Delta$  et 4 groupes de mots homologues pour  $\Lambda$

mots de $\Delta$	mots de $\Lambda$
ne contenant ni $F$ , ni $G$ ,	ne contenant ni $C$ , ni $E$ ,
contenant $F$ , mais pas $G$ ,	contenant $C$ , mais pas $E$ ,
contenant $G$ , mais pas $F$ ,	contenant $E$ , mais pas $C$ ,
contenant $F$ et $G$ ,	contenant $C$ et $E$ .

Le nombre et les longueurs des mots de groupes homologues doivent coïncider. Ici l'examen du tableau 3.30 extrait du tableau 3.29 montre que cette condition est vérifiée. La validité de cette condition à ce stade, où l'image de chaque facteur défini est précisée, implique en fait l'équivalence des deux fractions [Draper et Mitchell, 1967].

	fraction $\Delta$				fraction $\Lambda$		
	$F$	$G$			$C$	$E$	
$\Delta_0$	0	0	(0)	$\Lambda_0$	0	0	(0)
$\Delta_1$	1	0	(5)	$\Lambda_1$	1	0	(5)
$\Delta_2$	0	1	(4)	$\Lambda_2$	1	1	(5)
$\Delta_3$	1	1	(5)	$\Lambda_3$	0	1	(4)

TAB. 3.30 – Test d'équivalence entre fractions



vecteur colonne  $\mathbf{v}$  fait correspondre sa fréquence  $f(\mathbf{v})$  est appelé *vecteur de fréquence* de la fraction [Chen, 1992] (rappelons que toute fonction peut être considérée comme un vecteur indicé par les éléments de son ensemble de définition).

Pour obtenir l'ensemble des mots de définition à partir des mots générateurs, un procédé consiste à former toutes les combinaisons linéaires à coefficients dans  $\overline{\mathcal{F}}_2$  des lignes de la matrice génératrice. C'est ce procédé qui permet de passer de  $\Delta$  à  $\overline{\Delta}$  dans le tableau 3.29. On peut remplacer dans ce procédé la matrice génératrice par sa représentation en terme de vecteur de fréquences, ainsi que cela est illustré pour la fraction  $2^{7-2}$  à gauche du tableau 3.33. Le résultat est une matrice carrée  $G$  de dimension  $2^m$ , dont les lignes

$\mathbf{v}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$						
$\mathbf{f}$	0	3	2	2						
$\mathbf{a}'$		Matrice $G$				$\mathbf{w}$	Matrice $H$			
$\Delta_0$	(0,0)	0	0	0	0	(0)	1	1	1	1
$\Delta_1$	(1,0)	0	1	0	1	(5)	1	-1	1	-1
$\Delta_2$	(0,1)	0	0	1	1	(4)	1	1	-1	-1
$\Delta_3$	(1,1)	0	1	1	0	(5)	1	-1	-1	1

TAB. 3.33 – Relation entre le vecteur des fréquences et les longueurs de mots

correspondent aux différents mots de définition, les colonnes aux sous-ensembles de facteurs, éventuellement vides, pour lesquels la colonne associée dans la matrice génératrice est un vecteur  $\mathbf{v}$  donné. On peut indexer chaque colonne de cette matrice par le vecteur  $\mathbf{v}$  correspondant, chaque ligne par le vecteur  $\mathbf{a}$  des coefficients de la combinaison linéaire associée. L'élément au croisement de la ligne  $\mathbf{a}$  et de la colonne  $\mathbf{v}$  est le produit  $\mathbf{a}'\mathbf{v}$ , calculé dans  $\mathcal{F}_2$ , c'est-à-dire modulo 2. La fréquence reportée en haut de la colonne  $\mathbf{v}$  est la fréquence  $f(\mathbf{v})$  correspondante.

La longueur d'un mot s'obtient en sommant les coefficients de la ligne associée par les fréquences correspondantes. Ainsi, dans l'exemple, la longueur du mot  $\Delta_3$  indicé par le vecteur  $\mathbf{a} = (1,1)'$  est

$$l_3 = 0 \times 0 + 1 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 2 = 5 .$$

Plus généralement, si on note  $w(\mathbf{a})$  la longueur du mot indexé par  $\mathbf{a}$ , on a :

$$w(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{a}'\mathbf{v} f(\mathbf{v}) .$$

En notant  $\mathbf{f}$  le vecteur colonne des fréquences et  $\mathbf{w}$  le vecteur colonne des longueurs des mots, cette relation peut encore s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{w} = G \mathbf{f} . \tag{3.54}$$

La matrice  $G$ , formée de 0 et 1, n'est pas facile à manier. Il est plus commode de lui substituer sa version multiplicative  $H$ , obtenue en remplaçant 0 et 1 par 1 et  $-1$ , qui

figure à droite du tableau 3.33. La relation entre les deux matrices s'écrit

$$G = (J - H)/2 \quad (3.55)$$

où  $J$  est la matrice de même taille que  $H$  qui a toutes ses coordonnées égales à 1. Les résultats classiques déjà cités au paragraphe 3.2.3 permettent de montrer que  $H$  est une matrice d'Hadamard satisfaisant

$$H'H = 2^m \mathbf{I} . \quad (3.56)$$

De (3.54) et (3.55), on tire  $\mathbf{w} = (J - H) \mathbf{f}/2$ . Comme la somme  $\mathbf{1}'\mathbf{f}$  des fréquences est égale au nombre  $h$  de facteurs, on a [Burton et Connor, 1957]

$$\mathbf{w} = (h\mathbf{1} - H\mathbf{f})/2 . \quad (3.57)$$

Dans l'exemple, on a

$$h = 7, \quad \mathbf{f} = (0,3,2,2)', \quad \mathbf{w} = (0,5,4,5)' ,$$

et la formule peut être rapidement vérifiée.

Cette relation de Burton et Connor a plusieurs applications importantes.

### Recherche d'équivalence entre fractions

L'égalité (3.56) permet d'inverser (3.57) pour exprimer le vecteur  $\mathbf{f}$  des fréquences à partir du vecteur  $\mathbf{w}$  des longueurs de mots :

$$\mathbf{f} = (hH'\mathbf{1} - 2H'\mathbf{w})/2^m .$$

C'est ce résultat qui justifie la procédure utilisée par Draper et Mitchell pour prouver l'équivalence de deux fractions. Si le nombre et la longueur des mots homologues coïncident à la fin de leur procédure, les vecteurs de fréquence sont identiques et les fractions équivalentes.

### Fractions à moment $M_1$ maximum

Le moment  $M_1$  des longueurs de mot s'écrit

$$M_1 = \sum_{\mathbf{a}} w(\mathbf{a}) = \mathbf{1}'\mathbf{w} = (h\mathbf{1}'\mathbf{1} - \mathbf{1}'H\mathbf{f})/2 .$$

Ici,  $\mathbf{1}$  est un vecteur de dimension  $2^m$  et donc  $\mathbf{1}'\mathbf{1} = 2^m$ . Le produit  $\mathbf{1}'H$  a toutes ses coordonnées nulles sauf la première, égale à  $2^m$ . La première coordonnée de  $\mathbf{f}$  qui lui correspond est la fréquence  $f(\mathbf{0})$  du vecteur nul. Donc  $\mathbf{1}'H\mathbf{f} = 2^m f(\mathbf{0})$  et

$$M_1 = 2^{m-1}(h - f(\mathbf{0})) . \quad (3.58)$$

Dans le cas où chaque facteur figure dans au moins un mot générateur, on a  $f(\mathbf{0}) = 0$  et on retrouve la formule (3.38).

Lorsque  $f(\mathbf{0}) > 0$ , certains facteurs ne figurent dans aucun mot générateur. Le rajout de ces facteurs à certains mots générateurs, qui ramène  $f(\mathbf{0})$  à 0, ne peut que rallonger les mots de définition. L'amélioration globale qui en résulte compense souvent largement la perte de qualité engendrée pour ces facteurs.

Considérons par exemple la fraction  $2^{4-1}$  de résolution 3 définie par  $D = AB$ . Le facteur  $C$  ne figure pas dans l'unique mot de définition  $ABD$  et donc  $f(\mathbf{0}) = 1$ . En l'y rajoutant, on obtient une seconde fraction définie par  $D = ABC$ , qui a la résolution 4 et satisfait  $f(\mathbf{0}) = 0$ .

Ce rajout se traduit par une perte pour le facteur  $C$ . Son effet principal, confondu avec l'interaction  $ABCD$  de 4 facteurs dans la fraction initiale, se confond avec une interaction  $ABD$  de seulement 3 facteurs dans la seconde. De même son interaction  $AC$  avec  $A$ , confondue initialement avec l'interaction de trois facteurs  $BCD$ , se confond avec l'interaction  $BD$  de deux facteurs après rajout, etc ...

Mais la supériorité très nette de la seconde fraction pour chacun des trois autres facteurs  $A$ ,  $B$ ,  $D$  la fera préférer à la première, sauf dans le cas exceptionnel où l'on veut avoir un maximum d'information sur un des quatre facteurs, jugé beaucoup plus important que les autres. On peut alors décider d'utiliser plutôt la fraction de résolution 3, avec  $C$  comme facteur prioritaire.

Un autre exemple est donné par la fraction 4 du tableau 3.34 qui comporte un facteur  $E$  n'apparaissant dans aucun mot de définition et pour laquelle on a donc  $f(\mathbf{0}) = 1$ . La discussion du paragraphe 3.6.5 montre que, sauf cas exceptionnel, cette fraction est moins bonne que la fraction de profil  $4_35_4$  obtenue en rajoutant  $E$  à un mot générateur.

Sauf dans des cas particuliers où il y a une grande dissymétrie entre les facteurs étudiés, on a donc intérêt à prendre une fraction pour laquelle  $f(\mathbf{0}) = 0$  et qui a donc un moment  $M_1 = 2^{m-1}h$  maximum.

### Fractions à moment $M_2$ minimum

Le moment  $M_2$  des longueurs de mot est

$$\begin{aligned} M_2 &= \sum_{\mathbf{a}} w^2(\mathbf{a}) = \mathbf{w}'\mathbf{w} = (h\mathbf{1} - H\mathbf{f})' (h\mathbf{1} - H\mathbf{f})/4 \\ &= (h^2\mathbf{1}'\mathbf{1} - 2h\mathbf{1}'H\mathbf{f} + \mathbf{f}'H'H\mathbf{f})/4 \end{aligned}$$

Lorsque  $f(\mathbf{0}) = 0$  et que le premier moment  $M_1$  a sa valeur maximale  $2^{m-1}h$ , on a  $\mathbf{1}'H\mathbf{f} = 0$  et

$$M_2 = 2^{m-2} (h^2 + \mathbf{f}'\mathbf{f}) . \quad (3.59)$$

La somme des fréquences  $\mathbf{1}'\mathbf{f}$  est égale à  $h$  :  $\mathbf{1}'\mathbf{f} = h$ . Le moment  $M_2$  est donc minimum quand les fréquences différentes de  $f(\mathbf{0})$  sont aussi égales que possible. Ceci donne un

critère très pratique pour reconnaître si une fraction a un moment  $M_2$  minimum, et aussi des indications précieuses sur la façon de construire de bonnes fractions.

**Exemple 3.2** . La matrice génératrice des mots de définition de la fraction  $2^{11-5}$  définie par (3.42) est

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1

Les colonnes sont toutes distinctes et le vecteur des fréquences contient donc 11 fois 1 et 21 fois 0. On a  $\mathbf{f}'\mathbf{f} = 11$  et  $M_2$  prend sa valeur minimale

$$M_2 = 2^{5-2}(11^2 + 11) = 1056 .$$

**Exemple 3.3** . La matrice génératrice pour la fraction de type 1 du tableau 3.26 est

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1

Les colonnes associées à  $A, B, C$  sont égales et diffèrent des autres colonnes qui sont toutes distinctes. Le vecteur  $\mathbf{f}$  des fréquences contient 1 fois la valeur 3, 8 fois la valeur 1 et 21 fois la valeur 0. On a donc  $\mathbf{f}'\mathbf{f} = 17$ ,  $M_2 = 1104$ .

### 3.6.5 Les différents types de fraction $2^{8-3}$

Pour mieux comprendre le fonctionnement de l'algorithme de Draper et Mitchell, nous allons l'illustrer en cherchant tous les types de fraction  $2^{8-3}$ . Il s'agit donc d'aller un pas plus loin que dans l'exemple considéré au paragraphe 3.6.1 en introduisant un facteur défini  $H$  supplémentaire. On note  $h$  le nombre de lettres du produit qui le définit. Quitte à permuter les trois facteurs  $F, G, H$ , on peut toujours supposer  $f \geq g \geq h$ . D'autre part, on peut toujours partir, pour définir cette nouvelle fraction, d'un des trois types de fraction  $2^{7-2}$  du tableau 3.22. En effet, étant donné une fraction  $2^{8-3}$  de résolution 4 ayant  $A, B, C, D, E$  comme facteurs de base et  $F, G, H$  comme facteurs définis, les relations de définition de  $F$  et  $G$  définissent un plan de résolution 4 que l'on peut ramener à l'un des trois types du tableau 3.22 par une permutation  $\pi$  ad-hoc. Cette même permutation, étendue aux 8 facteurs en prenant  $\pi H = H$ , transforme la fraction  $2^{8-3}$  donnée en une fraction où  $F$  et  $G$  sont définis par l'un des 3 systèmes du tableau 3.22.

Reste donc à répertorier, pour chacun des 3 choix possibles pour  $F$  et  $G$ , tous les choix possibles pour  $H$  sachant que  $3 \leq h \leq g$ .

- 1er cas:  $F = ABCDE$ ,  $G = ABC$ . Nécessairement,  $h = 3$ . Le facteur  $H$  a soit 2, soit 1 lettre en commun avec  $G$ . A une permutation près des facteurs de base, on a donc soit  $H = BCD$ , soit  $H = CDE$ .
- 2ème cas:  $F = ABCD$ ,  $G = CDE$ , donc  $h = 3$ . Pour que le produit  $FH$  contienne deux lettres au moins, le produit définissant  $H$  doit contenir  $E$ . Il peut contenir 0 ou 1 autre lettre de  $G$ , ce qui donne à une permutation près les choix  $H = ABE$ ,  $H = BDE$ . Le premier choix conduit cependant à l'égalité  $FGH = 1$  et est donc prohibé. Le second choix  $H = BDE$ , qui donne  $FGH = AD$ , convient.
- 3ème cas:  $F = ABC$ ,  $G = BCD$ , donc  $h = 3$ . On classe les produits en fonction du nombre 2 ou 1 de lettres communes avec  $F$  et  $G$ . A une permutation près de  $F$  et  $G$ , on peut supposer que le nombre de lettres en commun avec  $F$  est supérieur ou égal au nombre de lettres en commun avec  $G$ . Si  $H$  a deux lettres en commun avec  $F$ , soit ces deux lettres appartiennent aussi à  $G$  et alors  $H = BCE$ , soit une seule d'entre elle y appartient et  $H$  est de la forme  $AB\star$ . Si la 3ème lettre appartient à  $G$ ,  $H = ABD$ , sinon  $H = ABE$ . Si  $H$  n'a qu'une lettre en commun avec  $F$  et donc aussi avec  $G$ , cette lettre ne peut être  $B$  ou  $C$  sinon il ne reste que la lettre  $E$  disponible pour former le produit  $H$ . Donc  $H = ADE$ .

Le tableau 3.34 donne les mots de définition de chacune des 7 fractions ainsi obtenues, ainsi que les profils de longueur des mots. Ces derniers sont identiques pour les fractions

	Définition	Mots de définition	Profil
1a	$F = ABCDE$ $G = ABC$ $H = BCD$	1 $ABCDEF$ $ABCG$ $DEFG$ $BCDH$ $AEFH$ $ADGH$ $BCEFGH$	$4_5 6_2$
1b	$F = ABCDE$ $G = ABC$ $H = CDE$	1 $ABCDEF$ $ABCG$ $DEFG$ $CDEH$ $ABFH$ $ABDEGH$ $CFGH$	$4_5 6_2$
2	$F = ABCD$ $G = CDE$ $H = BDE$	1 $ABCDF$ $CDEG$ $ABEFG$ $BDEH$ $ACEFH$ $BCGH$ $ADFGH$	$4_3 5_4$
3	$F = ABC$ $G = BCD$ $H = BCE$	1 $ABCF$ $BCDG$ $ADFG$ $BCEH$ $AEFH$ $DEGH$ $ABCDEFHG$	$4_6 8_1$
4	$F = ABC$ $G = BCD$ $H = ABD$	1 $ABCF$ $BCDG$ $ADFG$ $ABDH$ $CDFH$ $ACGH$ $BFGH$	$4_7$
1c	$F = ABC$ $G = BCD$ $H = ABE$	1 $ABCF$ $BCDG$ $ADFG$ $ABEH$ $CEFH$ $ACDEGH$ $BDEFGH$	$4_5 6_2$
1d	$F = ABC$ $G = BCD$ $H = ADE$	1 $ABCF$ $BCDG$ $ADFG$ $ADEH$ $BCDEFH$ $ABCEGH$ $EFGH$	$4_5 6_2$

TAB. 3.34 – Recherche de fractions  $2^{8-3}$  régulières de résolution 4

1a, 1b, 1c, 1d et il convient d'examiner si ces fractions sont ou ne sont pas équivalentes.

Considérons par exemple les fractions 1a et 1d. Le tableau 3.35 donne les matrices  $\overline{\Delta}$  et  $\overline{\Lambda}$  associées aux mots de définition et les matrices génératrices  $\Delta$  et  $\Lambda$  correspondantes. Les mots de définition sont notés  $\Delta_0$  à  $\Delta_7$  pour la fraction 1a,  $\Lambda_0$  à  $\Lambda_7$  pour la fraction 1d.

fraction 1a									fraction 1d										
$\Delta =$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$								$\Lambda =$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$									
	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$		$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$		
$\Delta_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	(0)	$\Lambda_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	(0)
$\Delta_1$	1	1	1	1	1	1	0	0	(6)	$\Lambda_1$	1	1	1	0	0	1	0	0	(4)
$\Delta_2$	1	1	1	0	0	0	1	0	(4)	$\Lambda_2$	0	1	1	1	0	0	1	0	(4)
$\Delta_3$	0	1	1	1	0	0	0	1	(4)	$\Lambda_3$	1	0	0	1	1	0	0	1	(4)
$\Delta_4$	0	0	0	1	1	1	1	0	(4)	$\Lambda_4$	1	0	0	1	0	1	1	0	(4)
$\Delta_5$	1	0	0	0	1	1	0	1	(4)	$\Lambda_5$	0	1	1	1	1	1	0	1	(6)
$\Delta_6$	1	0	0	1	0	0	1	1	(4)	$\Lambda_6$	1	1	1	0	1	0	1	1	(6)
$\Delta_7$	0	1	1	0	1	1	1	1	(6)	$\Lambda_7$	0	0	0	0	1	1	1	1	(4)
	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Delta}$									$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Lambda}$									

TAB. 3.35 – Recherche d'équivalence entre deux fractions

Nous cherchons maintenant de proche en proche une éventuelle permutation  $\pi$  transformant la fraction  $\Delta$  en la fraction  $\Lambda$ .

Les partitions induites par les colonnes de  $\Delta$  et  $\Lambda$  sont respectivement

$$\begin{aligned} \text{fraction } \Delta: & \{A\}, \{B,C\}, \{D\}, \{E,F\}, \{G\}, \{H\} \\ \text{fraction } \Lambda: & \{A\}, \{B,C\}, \{D\}, \{E,H\}, \{F\}, \{G\}. \end{aligned}$$

- $F$  figure dans deux mots de longueur 4 et deux mots de longueur 6 de  $\Delta$ . Son image  $\pi F$  est  $B$  ou  $E$ . Le premier choix est acceptable puisque  $B$  figure de même dans deux mots de longueur 4 et deux mots de longueurs 6 de  $\Lambda$ . On peut donc prendre  $\pi F = B$ .
- $\pi G$  peut a priori être l'un des 6 facteurs  $A, D, F, G$ . Essayons le premier choix de la liste  $\pi G = A$ . Le tableau 3.36, immédiatement déduit du tableau 3.35, résume l'information utile pour vérifier la cohérence de ce choix. A gauche figurent les 4 groupes de mots de  $\Delta$  définis par les occurrences de  $F$  et  $G$  et les longueurs correspondantes. Ainsi la 3ème ligne contient les mots  $\Delta_1, \Delta_5$  contenant  $F$  mais pas  $G$  et les longueurs 6 et 4 de ces mots. La partie droite donne les groupes de mots homologues, définis par les occurrences de  $\pi F = B, \pi G = A$ , et leurs longueurs. On vérifie immédiatement que les groupes homologues, figurant sur la même ligne, contiennent le même nombre de mots et des mots de même longueur. Le choix  $\pi F = B, \pi G = A$  est donc admissible et on peut poursuivre la recherche.

	fraction $\Delta$				fraction $\Lambda$		
	$F$	$G$			$B$	$A$	
$\Delta_0, \Delta_3$	0	0	(0,4)	$\Lambda_0, \Lambda_7$	0	0	(0,4)
$\Delta_2, \Delta_6$	0	1	(4,4)	$\Lambda_3, \Lambda_4$	0	1	(4,4)
$\Delta_1, \Delta_5$	1	0	(6,4)	$\Lambda_2, \Lambda_5$	1	0	(4,6)
$\Delta_4, \Delta_7$	1	1	(4,6)	$\Lambda_1, \Lambda_6$	1	1	(4,6)

TAB. 3.36 – Validité des choix  $\pi F = B, \pi G = A$

- $\pi H$  peut alors être pris égal à  $D$ ,  $F$  ou  $G$ . Le tableau 3.37 donne à gauche les 8 groupes de mots définis par les occurrences de  $F$ ,  $G$ ,  $H$  dans  $\Delta$ , puis les groupes de mots homologues pour chacun des trois choix possibles pour  $\pi H$ . On voit que les choix  $\pi H = D$ ,  $\pi H = F$  ne conviennent pas, mais que le choix  $\pi H = G$  est admissible. Compte tenu du résultat de Draper et Mitchell déjà cité, il y a donc équivalence entre les fractions  $1a$  et  $1d$ .

fraction $\Delta$					fraction $\Lambda$ Choix $\pi H = D$				fraction $\Lambda$ Choix $\pi H = F$				fraction $\Lambda$ Choix $\pi H = G$						
	$F$	$G$	$H$		$B$	$A$	$D$		$B$	$A$	$F$		$B$	$A$	$G$				
$\Delta_0$	0	0	0	(0)	$\Lambda_0, \Lambda_7$	0	0	0	(0,4)	$\Lambda_0$	0	0	0	(0)	$\Lambda_0$	0	0	0	(0)
$\Delta_3$	0	0	1	(4)		0	0	1		$\Lambda_7$	0	0	1	(4)	$\Lambda_7$	0	0	1	(4)
$\Delta_2$	0	1	0	(4)		0	1	0		$\Lambda_3$	0	1	0	(4)	$\Lambda_3$	0	1	0	(4)
$\Delta_6$	0	1	1	(4)	$\Lambda_3, \Lambda_4$	0	1	1	(4,4)	$\Lambda_4$	0	1	1	(4)	$\Lambda_4$	0	1	1	(4)
$\Delta_1$	1	0	0	(6)		1	0	0		$\Lambda_2$	1	0	0	(4)	$\Lambda_5$	1	0	0	(6)
$\Delta_5$	1	0	1	(4)	$\Lambda_2, \Lambda_5$	1	0	1	(4,6)	$\Lambda_5$	1	0	1	(6)	$\Lambda_2$	1	0	1	(4)
$\Delta_4$	1	1	0	(4)	$\Lambda_1, \Lambda_6$	1	1	0	(4,6)	$\Lambda_6$	1	1	0	(6)	$\Lambda_1$	1	1	0	(4)
$\Delta_7$	1	1	1	(6)		1	1	1		$\Lambda_1$	1	1	1	(4)	$\Lambda_6$	1	1	1	(6)

TAB. 3.37 – *Equivalence entre deux fractions*  $2^{8-3}$

- Si aucun choix n'avait convenu pour  $\pi H$ , on serait revenu sur le choix du facteur  $G$  en essayant le choix suivant  $\pi G = D$  pour  $G$ . La procédure rétro-récurrente se serait ainsi poursuivie soit jusqu'à ce que soient trouvées trois images  $\pi F$ ,  $\pi G$ ,  $\pi H$  acceptables, soit jusqu'à épuisement des choix possibles pour le premier facteur défini  $F$ .

L'équivalence entre les fractions  $1a$  et  $1d$  est donc prouvée. La permutation  $\pi$  définie par

$$\pi F = B, \pi G = A, \pi H = G \quad (3.60)$$

transforme la première dans la seconde. On trouve de même que les fractions  $1b$  et  $1c$  sont équivalentes à la fraction  $1a$ .

Si on tient à expliciter la permutation  $\pi$  définie par (3.60), on peut procéder comme au paragraphe 3.6.3. Soit par exemple à trouver l'image  $\pi A$ . On a

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc  $\Delta_A = \Delta_F + \Delta_G$ . Par suite

$$\Lambda_{\pi A} = \Lambda_{\pi F} + \Lambda_{\pi G} = \Lambda_B + \Lambda_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Lambda_D,$$

d'où  $\pi A = D$ . En procédant de même pour les autres facteurs, on obtient

$$\pi A = D, \quad \pi(\{B, C\}) = (\{E, H\}), \quad \pi D = F, \quad \pi(\{E, F\}) = (\{B, C\}), \quad \pi G = A, \quad \pi H = G.$$

La façon précise dont  $\pi$  opère sur les ensembles  $\{B,C\}$  et  $\{E,F\}$  peut être choisie arbitrairement, par exemple

$$\pi B = E, \quad \pi C = H, \quad \pi E = C, \quad \pi F = B .$$

La permutation ainsi définie, schématisée par les flèches ci-dessous,

$$A \longrightarrow D \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow C \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow A ,$$

est la permutation circulaire  $(A,D,F,B,E,C,H,G)$ .

On vérifie qu'elle transforme les mots  $ABCDEF$ ,  $ABCG$ ,  $BCDH$  générant la fraction 1a en les mots  $BCDEFH$ ,  $ADEH$ ,  $EFGH$  qui engendrent la fraction 1d.

On trouve de même que les permutations permettant de passer de la fraction 1a aux fractions 1b et 1c sont  $(A,H,F)(B,E)(C,D,G)$  et  $(A,B,E,G)(C,H),(D,F)$  respectivement.

Il y a donc en définitive 4 types de fraction  $2^{8-3}$ , les numéros 1, 2, 3, 4 du tableau 3.34, qui correspondent tous à des profils de longueur des mots distincts.

La fraction d'aberration minimum est la 2 qui a pour profil  $4_3 5_4$ . Elle confond 15 interactions de deux facteurs entre elles alors que les fractions 1, 3, 4 en confondent respectivement 24, 28 et 21 (tableau 3.38). Elle a un autre atout appréciable. Deux des

fraction	effets non confondus	groupes d'interactions confondues	ddl er.
1	$A; B; C; D; E; F; G; H; BE; BF; CE; CF$	$(AB,CG); (AC,BG); (AD,GH); (BD,CH)$ $(CD,BH); (AE,FH); (DF,EG); (DE,FG)$ $(AF,EH); (BC,AG,DH); (EF,DG,AH)$	8
2	$A; B; C; D; E; F; G; H; AB; AC; AD; AE$ $AF; AG; AH; BF; CF; DF; EF; FG; FH$	$(BC,GH); (BD,EH); (CD,EG); (BE,DH)$ $(CE,DG); (BG,CH); (DE,CG,BH)$	3
3	$A; B; C; D; E; F; G; H$	$(AB,CF); (AC,BF); (AD,FG); (BD,CG)$ $(CD,BG); (AG,DF); (AE,FH); (BE,CH)$ $(CE,BH); (AH,EF); (DE,GH); (EG,DH)$ $(BC,DG,EH,AF)$	10
4	$A; B; C; D; E; F; G; H; AE; BE; CE; DE$ $EF; EG; EH$	$(AB,DH,CF); (AC,GH,BF); (BC,DG,AF)$ $(AD,FG,BH); (BD,AH,CG); (CD,FH,BG)$ $(CH,AG,DF)$	10

TAB. 3.38 – Effets confondus dans les fractions  $2^{8-3}$  de résolution 4

facteurs  $A$  et  $F$  n'y apparaissent dans aucun mot de 4 lettres. Sous l'hypothèse d'absence d'interaction de 3 facteurs ou plus, on peut donc estimer toutes les interactions incluant l'un de ces deux facteurs. De plus, les effets principaux de ces deux facteurs ne sont confondus qu'avec des interactions d'au moins 4 facteurs, ce qui rend leur estimation très robuste.

Cependant, toujours sous l'hypothèse de nullité des interactions de 3 facteurs ou plus, la fraction 2 n'offre que 3 degrés de liberté pour estimer la variance résiduelle, alors que les fractions 1, 3, 4 en offrent respectivement 8, 10 et 10. Cet inconvénient de la fraction 2 est mineur si on utilise pour l'analyse les techniques de détection de facteurs actifs étudiées au paragraphe 3.3.

La fraction 4 présente des propriétés intéressantes. Le facteur de base  $E$  n'apparaît pas dans les mots de définition. Pour chaque niveau de  $E$ , on trouve donc l'ensemble des combinaisons de niveaux des 7 autres facteurs appartenant à la fraction  $2^{7-3}$  définie par les relations génératrices  $F = ABC$ ,  $G = BCD$ ,  $H = ABD$ . On dit que la fraction 4 est le *produit de Kronecker* entre cette fraction  $2^{7-3}$  et le plan factoriel complet  $2^1$  pour l'unique facteur  $E$ . Cette fraction 4 privilégie le facteur  $E$ . Elle confond son effet principal avec des interactions de 5 facteurs et les interactions de 2 facteurs incluant  $E$  avec des interactions de 4 facteurs au moins. Dans les autres fractions, les effets principaux sont confondus avec au minimum une interaction de 4 facteurs, les interactions de 2 facteurs avec au minimum une interaction de 3 facteurs. Mais cette situation luxueuse pour  $E$  ne se justifie guère, dans un contexte où il existe une fraction, la 2, qui permet d'étudier encore très confortablement 2 facteurs au lieu de 1. Noter qu'en rajoutant  $E$  à l'une des trois relations de définition génératrice, en posant par exemple  $F = ABCE$  au lieu de  $F = ABC$ , on rajoute  $E$  à 4 des mots de définition et on obtient une fraction de profil  $4_35_4$ .

Plus généralement, lorsqu'un facteur est absent des relations de définition, son rajout à l'une des relations de définition entraîne son rajout dans la moitié des mots de définition, ce qui améliore nettement la qualité du plan. Pour cette raison, la littérature ne considère pratiquement que des fractions où tous les facteurs apparaissent dans les mots de définition.

On notera que la fraction 2 est la fraction  $2^{8-3}$  figurant dans le premier catalogue de telles fraction, l'article de Brownlee *et al* [1948], ainsi que dans le catalogue classique des *National Bureau of Standards* [1957], qui est inclu dans le livre de McLean et Anderson [1984]. Ces deux catalogues précisent aussi une répartition en blocs des traitements que nous allons maintenant examiner.

## 3.7 Répartition en blocs d'une fraction régulière

### 3.7.1 Répartition en blocs de la fraction $2^{8-3}$ de profil $4_35_4$

Pour répartir la fraction 2 du tableau 3.34 en blocs, on utilise les pseudofacteurs

$$R_1 = BC, \quad R_2 = CD, \quad R_3 = DE . \quad (3.61)$$

On peut répartir la fraction en 2 blocs de taille 16, 4 blocs de taille 8 ou 8 blocs de taille 4 selon qu'on utilise pour définir le niveau du bloc un, deux ou trois pseudofacteurs. Par exemple, si on désire former 8 blocs, les blocs sont définis par les 8 triplets  $(R_1, R_2, R_3)$  de  $-1$  et  $1$ . Le tableau 3.39 donne les niveaux des facteurs et de ces pseudofacteurs blocs pour les 32 unités. A chaque triplet  $(R_1, R_2, R_3)$ , on a associé un numéro de bloc reporté dans la colonne  $R$ . On a aussi fait figurer dans le tableau les deux colonnes  $R_0$  et *ind-rep* précisant la randomisation, qui s'effectue comme celle décrite dans le paragraphe 3.4.3. Ainsi si les blocs correspondent à des journées distinctes d'expérimentation,  $R_0$  donne les numéros tirés au hasard des journées affectées aux différents traitements de la fraction, tandis que *ind-rep* donne les numéros d'unité dans cette journée, qui correspondent par exemple à l'ordre d'expérimentation des différents traitements pendant la journée.

fact. de base					fact. définis			blocs				Rand.		
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>R</i> <sub>1</sub>	<i>R</i> <sub>2</sub>	<i>R</i> <sub>3</sub>	<i>R</i>	<i>R</i> <sub>0</sub>	ind rep	
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7	1	0
1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7	1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	3	6	0	0
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	3	6	2	2
-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	5	3	3
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	5	2
-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	5	2	3
1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	5	2	0	0
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	4	4	2	2
1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	4	4	0	0
-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	0	0	1	1
1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	0	0	0	0
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	2	7	3	3
1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	2	7	0	0
-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	6	3	0	0
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	6	3	1	1
-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	6	3	2	2
1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	6	3	3	3
-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	2	7	2	2
1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	2	7	1	1
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	0	0	3	3
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	0	0	2	2
-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	4	4	3	3
1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	4	4	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	5	2	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	5	2	2	2
-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	5	0	0
1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	5	1	1
-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	3	6	1	1
1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	3	6	3	3
-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	7	1	2	2
1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	7	1	3	3

TAB. 3.39 – Fraction  $2^{8-3}$  de profil  $4_35_4$  en 8 blocs

$$\begin{aligned}
R_1 &= BC = ADF = BDEG = ACEFG = CDEH = ABEFH = GH = ABCDFGH \\
R_2 &= CD = ABF = EG = ABCDEFG = BCEH = ADEFH = BDGH = ACFGH \\
R_1R_2 &= BD = ACF = BCEG = ADEFG = EH = ABCDEFH = CDGH = ABFGH \\
R_3 &= DE = ABCEF = CG = ABDFG = BH = ACDFH = BCDEGH = AEFHG \\
R_1R_3 &= BCDE = AEF = BG = ACDFG = CH = ABDFH = DEGH = ABCEFGH \\
R_2R_3 &= CE = ABDEF = DG = ABCFG = BCDH = AFH = BEGH = ACDEFGH \\
R_1R_2R_3 &= BE = ACDEF = BCDG = AFG = DH = ABCFH = CEGH = ABDEFHG
\end{aligned}$$

TAB. 3.40 – *Egalités impliquant les effets blocs dans la fraction  $2^{8-3}$*

effets confondus (f.e.b comprenant plusieurs termes)	$(R_1 + BC + GH); (R_2 + CD + EG); (R_1R_2 + BD + EH)$ $(R_3 + DE + CG + BH); (R_1R_3 + BG + CH); (R_2R_3 + CE + DG)$ $(R_1R_2R_3 + BE + DH)$
effets non confondus (f.e.b réduite à un terme)	$A; B; C; D; E; F; G; H;$ $AB; AC; AD; AE; AF; AG; AH;$ $BF; CF; DF; EF; FG; FH$
f.e.b nulles (comprenant 0 terme)	$\gamma(BCE); \gamma(ADE); \gamma(ABCE)$

TAB. 3.41 – *f.e.b dans la fraction  $2^{8-3}$  en 8 blocs*

Si on sélectionne la fraction principale, les relations de définition de la fraction sont

$$1 = ABCDF = CDEG = ABEFG = BDEH = ACEFH = BCGH = ADFGH .$$

De ces relations et des relations de définition (3.61), on déduit les égalités du tableau 3.40 puis les f.e.b du tableau 3.41. Les interactions de 3 facteurs ou plus et les interactions bloc×traitement, supposées nulles, ont été omises dans l'expression de ces f.e.b.

Les effets blocs se confondent avec des interactions de deux facteurs déjà confondues entre elles. Par suite, avec cette répartition en blocs, les effets non confondus dans la fraction, dont les interactions de deux facteurs incluant  $A$  ou  $F$ , restent non confondus, et les 3 degrés de liberté pour estimer la variance résiduelle restent disponibles.

Dans la table des fractions  $2^{h-m}$  du *National Bureau of Standard*, [1957], cette fraction apparaît avec possibilité de rajouter un second système de 4 blocs, croisé avec le précédent, défini par les deux pseudofacteurs

$$S_1 = ADE, \quad S_2 = ABCE .$$

La possibilité de rajouter un tel système peut souvent être utile. Ainsi dans l'exemple des microcomtés considéré au paragraphe 3.6.1, la variabilité importante du lait collecté, d'une journée d'expérience à la suivante, amène de façon naturelle à considérer les 4 microcomtés réalisés un même jour comme un bloc. Mais, les 4 fromages réalisés le sont avec 4 systèmes cuve-pressé différents. Si on soupçonnait des différences non négligeables dans les régulations de ces systèmes, il serait prudent de contrôler aussi ce second facteur bloc croisé avec le facteur journée.

L'introduction de ce second système de blocs entraîne la perte de deux des degrés de liberté de l'erreur puisque les f.e.b  $\gamma(ADE) = e(S_1)$ ,  $\gamma(ABCE) = e(S_2)$  ne sont plus

nulles. Il rend par ailleurs non estimable l'interaction  $AF$ , confondue avec l'effet bloc  $S_1S_2$  puisque

$$S_1S_2 = BCD = AF = BEG = ACDEFG = CEH = ABDEFH = DGH = ABCFGH .$$

Le raisonnement qui mène au choix des produits définissant  $R_1, R_2, R_3$  est ici assez simple. Tout d'abord les vecteurs d'exposants associés doivent être indépendants, sans quoi le triplet  $(R_1, R_2, R_3)$  prend au plus 4 valeurs. Ensuite les trois symboles  $R_1, R_2, R_3$  et les produits qu'ils génèrent  $R_1R_2, R_1R_3, R_2R_3, R_1R_2R_3$  doivent être distincts de  $A, B, C, D, E, F = ABCD, G = CDE, H = BDE$  si l'on ne veut pas confondre un effet principal avec un effet bloc et différents des produits  $AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, BF, CF, DF, EF, FG, FH$  si l'on ne veut pas confondre ces interactions estimables sur la fraction. En excluant le produit vide, il reste  $10 = 32 - 22$  choix possibles  $BC, BD, BE, DE, CD, CE, ADE, BCE, BCDE, ABCE$  pour les trois pseudofacteurs. La recherche peut être effectuée par rétro-récurrence. On peut prendre par exemple  $R_1 = BC$ , puis  $R_2 = BD$  puisque alors  $R_1R_2 = CD$  appartient à la liste autorisée. Le troisième facteur  $R_3$  doit être distinct de  $R_1, R_2, R_1R_2$  et tel que les produits  $R_1R_3, R_2R_3, R_1R_2R_3$  soient aussi dans la liste. Le choix  $R_3 = BE$  qui conduit à  $R_1R_3 = CE, R_2R_3 = DE, R_1R_2R_3 = BCDE$  convient.

Peut-on définir un 4ème pseudofacteur  $R_4$  et arriver ainsi à un découpage en 16 blocs de la fraction 2 du tableau 3.34? Il est clair qu'on ne peut le faire sans confondre des interactions supplémentaires puisque les 15 produits générés par  $R_1, R_2, R_3, R_4$  ne peuvent tous appartenir à la liste des 10 termes autorisés. Mais peut-on le faire sans confondre l'un des 8 effets principaux?

La réponse est *non*. On peut obtenir cette réponse négative par un programme tel que PLANOR qui effectue automatiquement la recherche par rétro-récurrence. Dans le cas présent, on peut aussi prouver l'impossibilité par un raisonnement géométrique simple.

★ Si on identifie les produits entre les 5 facteurs de bases aux vecteurs d'exposants de  $\mathcal{F}_2^5$  associés, les produits définissant  $R_1, R_2, R_3, R_4$  génèrent un sous-espace de dimension 4, identifiable au noyau  $K$  d'une application linéaire de  $\mathcal{F}_2^5$  dans  $\mathcal{F}_2$  (i.e. une forme linéaire). Cette forme est représentable par un vecteur ligne  $\mathbf{v}$  de dimension 5 à coordonnées dans  $\mathcal{F}_2$ . Si ce vecteur a une coordonnée nulle, le noyau contient le facteur correspondant. Par exemple, si  $v = (1,1,1,1,0)$ , le noyau contient le vecteur  $(0,0,0,0,1)'$  associé au facteur  $A^0B^0C^0D^0E^1 = E$ . Si ce vecteur est  $v = (1,1,1,1,1)$ , le facteur  $F = ABCD$  associé au vecteur  $(1,1,1,1,0)'$  appartient au noyau  $K$  et est donc confondu avec l'effet bloc. Donc dans tous les cas, il y a au moins un effet principal confondu avec les effets blocs.

On remarque que le noyau de la forme linéaire définie par  $v = (1,1,1,1,1)$  contient tous les vecteurs ayant un nombre pair de 1, qui sont associés aux produits ayant un nombre pair de lettre. Ceci suggère d'utiliser pour la partition en 16 blocs plutôt la fraction de profil  $4_56_2$  où les trois produits  $F, G, H$  sont produits d'un nombre impair de facteurs de base.

Le même raisonnement géométrique montre que les fractions de profil  $4_56_2$  et  $4_68_1$  du tableau 3.34 peuvent, contrairement à la fraction de profil  $4_35_4$ , être divisées en 16 blocs en conservant la propriété caractéristique de la résolution 4, à savoir l'estimabilité avec la variance minimum  $\sigma^2/32$  des effets principaux dans le modèle qui inclut toutes

les interactions de deux facteurs et les 15 effets blocs. Les pseudofacteurs  $R_1, R_2, R_3, R_4$  peuvent être choisis arbitrairement parmi les produits d'un nombre pair de facteurs de base, à condition d'être indépendants. Les produits entre ces pseudofacteurs sont alors tous les produits d'un nombre pair de facteurs de base. Le tableau 3.42 donne une définition explicite de la fraction  $2^{8-3}$  de profil  $4_5 6_2$  en 16 blocs et ses principales propriétés.

facteurs définis	$F = ABCDE, G = ABC, H = BCD$
mots de définition	$1, ABCDEF, ABCG, DEFG,$ $BCDH, AEFH, ADGH, BCEFGH$
profil	$4_5 6_2$
pseudofacteurs blocs	$R_1 = AB, R_2 = AC, R_3 = AD, R_4 = AE$
effets non confondus	$A, B, C, D, E, F, G, H$
effets confondus	$(R_1, CG, AB), (R_2, BG, AC), (R_1 R_2, BC, AG, DH), (R_3, GH, AD),$ $(R_1 R_3, CH, BD), (R_2 R_3, BH, CD), (R_1 R_2 R_3, AH, EF, DG), (R_4, FH, AE),$ $(R_1 R_4, BE), (R_2 R_4, CE), (R_1 R_2 R_4, EG, DF), (R_3 R_4, FG, DE),$ $(R_1 R_3 R_4, CF), (R_2 R_3 R_4, BF), (R_1 R_2 R_3 R_4, AF, EH)$
ddl erreur = 8	

TAB. 3.42 – Fraction régulière  $2^{8-3}$ , de résolution 4, en 16 blocs

La notion d'équivalence dans la recherche de la répartition en blocs ne peut être définie comme dans le cas des fractions sans blocs. Bien sûr, toute permutation des pseudofacteurs  $R_1, R_2, R_3$  dans (3.61), par exemple

$$R_2 = BC, \quad R_3 = CD, \quad R_1 = DE,$$

conduit à une même répartition en blocs. Mais on peut également remplacer  $R_1, R_2, R_3$  par trois de leurs produits indépendants, par exemple

$$R_1 = BCDE, \quad R_2 = CE, \quad R_3 = BE,$$

sans changer la répartition. En d'autres termes, tous les choix tels que les vecteurs d'exposants associés engendrent le même sous-espace de  $\mathcal{F}_2^5$  sont équivalents. Ce sous-espace est ici déterminé sans ambiguïté, puisque les 7 produits entre les pseudofacteurs  $R_1, R_2, R_3$  sont précisément égaux aux produits de deux facteurs apparaissant dans les 7 f.e.b du tableau 3.41 comprenant plusieurs interactions de deux facteurs. Tout autre système de 8 blocs est non équivalent puisqu'il doit confondre avec les blocs soit l'une des 13 interactions de deux facteurs non confondue sur la fraction, soit l'un des trois degrés de liberté de l'erreur.

En revanche, si l'on utilise seulement deux pseudofacteurs blocs  $R_1, R_2$  pour répartir les 32 unités en 4 blocs de taille 8, deux solutions telles que

$$R_1 = BC, \quad R_2 = BD,$$

$$R_1 = BC, \quad R_2 = CE,$$

qui ne confondent pas les mêmes trois effets blocs et correspondent à des sous-espaces de dimension 2 distincts de  $\mathcal{F}_2^5$ , sont équivalentes. On vérifie sans difficulté que la permutation

$(B,G)(C,H)$  qui transpose  $B$  et  $G$  d'une part,  $C$  et  $H$  de l'autre, laisse globalement invariant l'ensemble des mots de définition de la fraction et transforme le premier système de blocs dans le second. Par contre, le système

$$R_1 = BC, \quad R_2 = DE$$

n'est pas équivalent puisque l'effet bloc  $R_2$  est confondu avec 3 interactions de 2 facteurs  $DE, CG, BH$  alors que les effets blocs sont confondus avec seulement 2 telles interactions dans les deux autres systèmes.

L'exemple de la fraction  $2^{8-3}$  en 16 blocs montre que le choix de la fraction peut être remis en cause par la répartition en blocs. Une recherche rétro-récurrente de telles fractions doit donc considérer simultanément tous les facteurs traitements et blocs. Pour être efficace, elle doit aussi s'appuyer sur les symétries pour ne retenir à chaque étape que des fractions non équivalentes.

Sun *et al* [1995] ont effectué une telle recherche systématique de fractions en blocs en s'appuyant sur le catalogue de Chen J. *et al* [1993]. Leur article fournit une liste simplifiée des différents types de fractions  $2^{h-m}$  en blocs pour  $N = 2^{h-m} \leq 128$  et  $h \leq 9$ . Pour classer ces fractions, ils utilisent le critère d'aberration et aussi des critères basés sur le nombre d'interactions de 2, 3, 4, ... facteurs confondues avec les blocs.

Dans bien des cas, leur recherche systématique a permis de trouver une répartition en bloc *meilleure* que celle figurant dans les tables du National Bureau of Standard [1957]. Ainsi, pour la fraction 2 du tableau 3.22, fraction  $2^{7-2}$  de profil  $4_15_2$  définie par  $F = ABCD, G = CDE$ , les tables du National Bureau of Standard proposent la répartition en 2 blocs définie par  $R = CD$ , Sen *et al* celle définie par  $R = ACE$ . Les égalités donnant les effets confondus avec les blocs dans les deux cas sont

$$1 : CD = EG = ABF = ABCDEFG, \quad 2 : ACE = ADG = BDEF = BCFG.$$

Avec la première répartition, l'effet bloc vient s'ajouter à la f.e.b  $e(CD) + e(EG)$ , ce qui peut compliquer l'interprétation et interdit toute estimation de cet effet bloc. La seconde répartition apparaît donc préférable.

### 3.7.2 Répartition en blocs d'une fraction $2^{11-5}$

Dans l'expérimentation sur les comtés, on ne dispose pour la fabrication que de 4 systèmes cuve–presse convenablement équipés. Quatre microcomtés seulement peuvent donc être fabriqués chaque jour et compte tenu des variations quotidiennes du lait collecté, il est souhaitable de répartir les traitements en blocs de taille 4 correspondant aux différentes journées d'expérimentation. Une alternative acceptable est de former des blocs de 8 unités en prévoyant d'expérimenter par périodes de deux jours consécutifs.

En fait, trois facteurs apparaissent spécialement importants aux yeux des expérimentateurs. La fraction de type 2 du tableau 3.26 est donc a priori la mieux adaptée des fractions considérées. Le problème est alors de trouver une définition des blocs qui conserve le mieux possible les propriétés de cette fraction.

Une recherche rétro-récurrente de 4 ou 3 pseudofacteurs blocs, imposant dans tous les cas de ne confondre aucun des 11 effets principaux avec les effets blocs, donne les résultats suivants.

- Avec 16 blocs, il est impossible de préserver toutes les interactions entre les trois facteurs *majeurs*  $A, B, C$  et les autres facteurs : certaines de ces interactions sont obligatoirement confondues avec des effets blocs. On aboutit à une même impossibilité en partant de la fraction de type 1 du tableau 3.26.
- Différentes recherches rétro-récurrentes, menées en faisant varier de façon aléatoire l'ordre dans lequel sont essayés les différents produits de facteurs de base utilisés pour définir les 4 pseudofacteurs blocs, conduisent à 4 types de plans différents. Les caractéristiques des deux types les plus appropriés sont reportées au tableau 3.43. Le premier confond avec les blocs seulement trois interactions supplémentaires. Mais

Définition (rappel)	$G = CDEF, H = ABCF, I = ABDEF, J = ABCE, K = ABCD$	
pseudofacteurs blocs	<p>Type 1</p> $R_1 = ABCEF, R_2 = DE,$ $R_3 = AB, R_4 = AC$	<p>Type 2</p> $R_1 = BDF, R_2 = BEF,$ $R_3 = ACEF, R_4 = BCF$
effets confondus	$(R_3, AB), (R_4, AC), (R_3 R_4, BC)$ $(EJ, GI, FH, DK), (R_2, DE, JK),$ $(R_2 R_3, GH, FI), (HI, FG), (DJ, EK),$ $(DF, HK), (EI, GJ), (R_1 R_2 R_3, IJ, EG),$ $(R_1 R_2, DH, FK), (EF, HJ), (GK, DI),$ $(R_1 R_3, IK, DG), (R_1, FJ, EH)$	$(R_3 R_4, CJ), (R_2 R_4, CE), (R_1 R_3 R_4, BI)$ $(R_1 R_2 R_4, BG), (R_1 R_4, CD)$ $(R_1 R_2 R_3 R_4, CK), (R_4, AH), (R_2 R_3 R_4, AF)$ $(R_2 R_3, EJ, GI, FH, DK), (R_1 R_2, DE, JK),$ $(GH, FI), (HI, FG), (R_1 R_3, DJ, EK),$ $(DF, HK), (EI, GJ), (IJ, EG),$ $(DH, FK), (EF, HJ), (GK, DI),$ $(IK, DG), (FJ, EH)$
effets non confondus	$A; B; C; D; E; F; G; H; I; J; K; AD; AE; AF$ $AG; AH; AI; AJ; AK; BD; BE; BF; BG; BH$ $BI; BJ; BK; CD; CE; CF; CG; CH; CI; CJ; CK$  $R_1 R_4; R_2 R_4; R_1 R_2 R_4; R_1 R_3 R_4$ $R_2 R_3 R_4; R_1 R_2 R_3 R_4$	$A; B; C; D; E; F; G; H; I; J; K; AB$ $AC; AD; AE; AG; AI; AJ; AK; BC; BD$ $BE; BF; BH; BJ; BK; CF; CG; CH; CI$  $R_1; R_2; R_3; R_1 R_2 R_3$
d.d.l résiduels	6	8

TAB. 3.43 – Répartition en 16 blocs d'une fraction  $2^{11-5}$

il s'agit des trois interactions entre les facteurs majeurs  $A, B, C$ . Le second confond 8 interactions supplémentaires entre l'un des facteurs  $A, B, C$  et l'un des autres facteurs.

- Dans chacun des deux plans, il y a des effets blocs non confondus, 6 dans le premier, 4 dans le second. On peut donc évaluer l'importance des effets blocs et en faisant l'hypothèse qu'ils sont aléatoires, tester les interactions avec  $A, B, C$  confondues avec les blocs. Kobilinsky, Fliss, Carpentier [1995] précisent la méthode d'analyse d'un tel plan sur un exemple analogue. Pour un aperçu beaucoup plus général sur l'analyse des dispositifs avec un ou plusieurs systèmes de blocs, on pourra se reporter à Bailey [1981, 1991], ainsi qu'à la notice du logiciel GENSTAT 5 [1987].
- Les deux types peuvent être utilisés avec seulement 8 blocs en ignorant le facteur  $R_4$ , c'est-à-dire en utilisant seulement les pseudofacteurs  $R_1, R_2, R_3$  pour définir

les blocs. Les effets contenant  $R_4$  sont alors ignorés. Dans le type 2, aucune des interactions avec les facteurs  $A, B, C$  n'est alors confondue et l'on garde intactes les propriétés de la fraction initiale. Dans le type 1, l'interaction  $AB$  reste confondue avec un effet bloc.

- On peut aussi utiliser  $R_1, R_2, R_3$  pour diviser les unités expérimentales en 8 blocs correspondant aux groupes de deux journées consécutives d'expérimentation, puis  $R_4$  pour diviser les traitements de chaque bloc en deux *sous-blocs* correspondant à chacune des deux journées du bloc. De cette façon, les effets principaux  $A$  à  $K$  des facteurs traitements sont non confondus avec les effets blocs et sous-blocs et sont estimés avec la précision maximale de  $\sigma^2/64$ , où  $\sigma^2$  est l'écart-type *intra-journée*. La randomisation doit alors respecter la structure en blocs et sous-blocs. Elle est donc effectuée en trois temps. On affecte de façon aléatoire les blocs aux groupes de deux journées consécutives, ce qui se traduit par le tirage d'une permutation aléatoire des nombres de 1 à 8. Pour chaque bloc, on affecte de façon aléatoire les sous-blocs à chacune des journées, ce qui implique de tirer pour chaque bloc une permutation des deux numéros de journées. Enfin les traitements de chaque sous-bloc sont affectés de façon aléatoire aux 4 systèmes cuve-pressé, ce qui implique de tirer au hasard de façon indépendante 16 permutations des nombres 1 à 4.

### 3.8 Plans asymétriques pour facteurs qualitatifs à 2 et 4 niveaux

Lorsque les facteurs traitements ont des nombres de niveaux différents, ils ne peuvent être traités de façon symétrique. Les plans correspondants sont dits *asymétriques* par opposition aux plans où leurs nombres de niveaux sont tous égaux qui sont dits *symétriques*.

Si il n'y a que des facteurs à 2 et 4 niveaux, la technique de construction d'une fraction régulière utilisée pour les facteurs à 2 niveaux s'étend facilement en éclatant chaque facteur à 4 niveaux en deux *pseudofacteurs* à 2 niveaux. Par exemple, dans une étude sur la croissance en fermenteur d'un rhizobium symbiote du soja [Cliquet *et al*, 1994], l'un des facteurs étudié est la source de carbone qui prend les 4 niveaux figurant à gauche du tableau 3.44. Ces niveaux sont codés par des couples  $(A_1, A_2)$  où  $A_1, A_2$  prennent les valeurs 1,  $-1$  si l'on adopte une notation multiplicative, les valeurs 0, 1 si l'on adopte une notation additive. On dit que  $A_1, A_2$  sont deux *pseudofacteurs* à 2 niveaux

$A$	$A_1$ $A_2$	$A_1$ $A_2$
Mannitol	( 0, 0)	( 1, 1)
Glycérol	( 0, 1)	( 1, $-1$ )
Gluconate	( 1, 0)	( $-1$ , 1)
Glucose	( 1, 1)	( $-1$ , $-1$ )

TAB. 3.44 – *Décomposition en pseudofacteurs d'un facteur à 4 niveaux*

obtenus par éclatement du facteur  $A$  à 4 niveaux, ou encore qu'on a *décomposé*  $A$  en deux pseudofacteurs à 2 niveaux. Cette décomposition n'a pas à correspondre à une réelle décomposition en deux véritables facteurs. C'est uniquement un artefact pour se ramener aux techniques de construction déjà exposées. Dans cet exemple où l'on s'intéresse de façon

symétrique aux 4 sources de carbone, on aurait d'ailleurs pu choisir la correspondance entre les niveaux réels et les couples  $(A_1, A_2)$  de n'importe quelle autre façon. On verra par contre que dans le cas d'un facteur quantitatif où il n'y a plus symétrie entre les niveaux, le choix de cette correspondance a un rôle important.

Après décomposition des facteurs à 4 niveaux en pseudofacteurs à 2 niveaux, on peut utiliser la technique de construction de fractions régulières précédemment décrite pour les facteurs à 2 niveaux. Cependant on doit tenir compte dans la construction et l'étude des propriétés de la fraction de ce que, lorsque les deux pseudofacteurs  $A_1, A_2$  résultant de la décomposition d'un même facteur  $A$  à 4 niveaux apparaissent simultanément dans un mot de définition ou une interaction, le facteur  $A$  ne doit être compté qu'un fois. Ainsi  $e(A_1A_2)$  est un effet principal de  $A$  au même titre que  $e(A_1)$  et  $e(A_2)$ . Si  $B$  est un facteur à 2 niveaux,  $e(A_1A_2B)$  est une interaction de 2 facteurs de même que  $e(A_1B)$  et  $e(A_2B)$ . Si on représente les facteurs par des lettres et les pseudofacteurs provenant de la décomposition d'un même facteur par la même lettre indicée, le nombre de facteurs dans une interaction est donc le nombre de lettres distinctes y apparaissant. Si l'on respecte cette façon de compter, les définitions et propositions des paragraphes 3.2 à 3.5 s'appliquent sans changement. En particulier, la *longueur* ou *poïds* d'un mot est ce nombre de lettres distinctes, et non le nombre total de symboles qu'il contient.

**Exemple 3.4 .** On a 16 unités, 1 facteur  $A$  à 4 niveaux et 3 facteurs  $B, C, D$  à 2 niveaux. Le facteur  $A$  est décomposé en deux pseudofacteurs  $A_1, A_2$  à 2 niveaux et on définit une fraction  $1/2$  du plan factoriel complet  $4 \times 2^3$  par

$$D = A_1A_2BC .$$

L'unique mot de définition  $A_1A_2BCD$  inclut 4 facteurs, non pas 5, et le plan est donc de résolution 4 et non pas 5. L'effet principal  $B$  est confondu avec une interaction de 3 facteurs  $A_1A_2CD$ , l'effet principal  $A_1$  avec une interaction de 4 facteurs  $A_2BCD$ . L'interaction  $BC$  est confondue avec une autre interaction de 2 facteurs  $A_1A_2D$  alors que l'interaction  $A_1B$  se confond seulement avec une autre interaction de 3 facteurs  $A_2CD$ , etc ...

Le cas particulier suivant illustre le type de raisonnement auquel peut amener la construction d'une telle fraction asymétrique.

**Exemple 3.5 .** Il y a 64 unités, 2 facteurs à 4 niveaux  $A$ , décomposé en  $A_1, A_2$ , et  $B$ , décomposé en  $B_1, B_2$ , et 4 facteurs  $C, D, E, F$  à 2 niveaux. On cherche une bonne fraction.

Prenons  $A_1, A_2, B_1, B_2, C, D$  comme facteurs de base et cherchons à définir  $E$  et  $F$ . En résolution 5, ils doivent être tous deux produits de 4 facteurs, donc de la forme  $\alpha\beta CD$  où  $\alpha$  est un des trois termes  $A_1, A_2, A_1A_2$  et  $\beta$  un des trois termes  $B_1, B_2, B_1B_2$ . Mais  $CD$  s'élimine alors du produit  $EF$  et on trouve une relation entre 4 facteurs. Le mieux que l'on puisse obtenir est donc une fraction de résolution 4 et, comme dans le cas des facteurs à 2 niveaux, il est naturel de se demander quelles sont les types de fraction que l'on peut former dans cette résolution. Mais nous allons voir que l'asymétrie modifie très sensiblement la méthode de recherche de ces types.

La proposition 3.8 montre que l'on peut inclure  $A_1, A_2, B_1, B_2, C$  parmi les facteurs de base sans restreindre la recherche puisque, en résolution 4, il ne peut y avoir de relation linéaire entre ces 5 pseudofacteurs issus des trois facteurs  $A, B, C$ . Si aucun des autres facteurs  $D, E, F$  ne peut y être également inclu, chacun d'eux est un produit entre les 5 facteurs  $A_1, A_2, B_1, B_2, C$  et la fraction ne comporte en fait que  $2^5$  traitements différents. Nous allons écarter ce cas pour l'instant.

On peut donc trouver un 6ème facteur de base parmi les facteurs  $D, E, F$  et, à une permutation près de ces facteurs, supposer qu'il s'agit de  $D$ . Le problème devient alors de définir à une équivalence près les deux facteurs  $E, F$  à partir de  $A_1, A_2, B_1, B_2, C, D$ .

La définition de l'équivalence entre deux fractions n'est cependant plus la même que dans le cas où tous les facteurs ont deux niveaux. La permutation  $\pi$  qui fait passer d'une fraction à l'autre ne peut échanger entre eux que des facteurs ayant un même nombre de niveaux, à savoir les facteurs à 2 niveaux  $C, D, E, F$  d'une part, les facteurs à 4 niveaux  $A, B$  de l'autre. Par ailleurs, pour un facteur à 4 niveaux tel que  $A$ , dont les niveaux  $(A_1, A_2)$  sont dans l'espace vectoriel  $\mathcal{F}_2^2$ , on peut effectuer une transformation linéaire inversible de cet espace. On montre qu'il revient au même de remplacer dans les mots de définition  $A_1, A_2$  par deux autres produits indépendants de ces mêmes facteurs. Il y a 3 façons de choisir le produit remplaçant  $A_1$ , et pour chacune d'elles deux façons de choisir celui remplaçant  $A_2$ , soit au total 6 transformations possibles, données par les colonnes du tableau 3.45.

1	2	3	4	5	6
$A_1$	$A_1$	$A_2$	$A_2$	$A_1A_2$	$A_1A_2$
$A_2$	$A_1A_2$	$A_1$	$A_1A_2$	$A_1$	$A_2$
$A_1A_2$	$A_2$	$A_1A_2$	$A_1$	$A_2$	$A_1$

TAB. 3.45 – *Permutations équivalentes des effets d'un facteur à 4 niveaux*

★ Avec un facteur  $A$  à 8 niveaux, décomposé en trois pseudofacteurs  $A_1, A_2, A_3$  à 2 niveaux, il y aurait  $8 - 1$  choix possible pour le produit remplaçant  $A_1$ , puis  $8 - 2$  pour celui associé à  $A_2$  et enfin  $8 - 4$  pour celui associé à  $A_3$ , soit  $7 \times 6 \times 4 = 168$  transformations possibles. Avec un facteur à 9 niveaux décomposé en deux pseudofacteurs à 3 niveaux, il y aurait  $(9 - 1)(9 - 3) = 48$  transformations possibles.

Comme dans le cas symétrique, deux fractions équivalentes doivent avoir des mots de même longueur. Mais l'équivalence conserve en outre les nombres de facteurs à 4 et 2 niveaux de chaque mot. Ceci donne un critère pratique commode pour reconnaître la non équivalence de deux fractions. Pour tout couple d'entiers  $(w_4, w_2)$ , le nombre  $A(w_4, w_2)$  de mots comportant  $w_4$  facteurs à 4 niveaux et  $w_2$  facteurs à 2 niveaux doit être le même dans deux fractions équivalentes. La fonction  $(w_4, w_2) \mapsto A(w_4, w_2)$  est appelée le profil de la fraction. Deux fractions équivalentes doivent donc avoir le même profil.

Il ne semble pas y avoir à ce jour d'algorithme publié pour tester l'équivalence entre deux fractions de même profil dans ce cas asymétrique. Mais dans l'exemple de petite taille étudié ici, on peut facilement prouver que les fractions de même profil sont équivalentes en exhibant les permutations ad hoc.

Pour énumérer les fractions, on les classe en fonction des nombres  $e_4, e_2$  de facteurs à 4 et 2 niveaux dans le produit définissant  $E$ , puis des nombres  $f_4$  et  $f_2$  de facteurs à 4 et 2 niveaux dans le produit définissant  $F$ . A une permutation près de  $E$  et  $F$ , on peut toujours supposer  $e_4 \geq f_4$  et  $e_2 \geq f_2$  si  $e_4 = f_4$ . Pour des valeurs déterminées de  $e_4, e_2, f_4, f_2$  on tient éventuellement compte des nombres  $g_4, g_2$  de facteurs à 4 et 2 niveaux communs aux produits définissant  $E$  et  $F$ , ainsi que du nombre  $g'_4 \leq g_4$  de facteurs à 4 niveaux qui apparaissent sous la forme d'un même produit de pseudofacteurs dans les définitions de  $E$  et  $F$ .

Pour que la fraction soit de résolution 4, les produits définissant  $E$  et  $F$  doivent comporter au moins trois facteurs et être tels que  $EF$  est produit d'au moins 2 facteurs. En veillant à respecter ces contraintes, on aboutit au tableau 3.46 qui montre l'existence de 7 types de fractions. Dans ce tableau, les fractions ayant un même profil portent le même numéro. On les distingue en rajoutant une lettre à droite de ce numéro. Les permutations montrant que ces fractions sont équivalentes figurent au bas du tableau. La notation des profils à droite du tableau s'inspire de celle de Brownlee *et al.* Chaque couple  $(w_4, w_2)$  est indiqué par le nombre  $A(w_4, w_2)$  de mots comportant  $w_4$  facteurs à 4 niveaux et  $w_2$  facteurs à 2 niveaux. L'indice 1 est systématiquement omis pour alléger la notation.

	$e_4$	$e_2$	$f_4$	$f_2$	$g_4$	$g'_4$	$g_2$	$E$	$F$	$EF$	profil
1a	2	2	2	2				$E = A_1B_1CD$	$F = A_2B_2CD$	$EF = A_1A_2B_1B_2$	$(2,3)_2(2,2)$
2a	-	-	2	1		1		-	$F = A_1B_2C$	$EF = B_1B_2D$	$(2,3)(2,2)(1,3)$
1b	-	-	2	1		0		-	$F = A_2B_2C$	$EF = A_1A_2B_1B_2D$	$(2,3)_2(2,2)$
2b	-	-	1	2				-	$F = A_2CD$	$EF = A_1A_2B_1$	$(2,3)(2,2)(1,3)$
3	2	1	2	1		2		$E = A_1B_1C$	$F = A_1B_1D$	$EF = CD$	$(2,2)_2(0,4)$
4	-	-	2	1		1		-	$F = A_1B_2D$	$EF = B_1B_2CD$	$(2,2)_2(1,4)$
5	-	-	2	1		0	1	-	$F = A_2B_2C$	$EF = A_1A_2B_1B_2$	$(2,2)_3$
6	-	-	2	1		0	0	-	$F = A_2B_2D$	$EF = A_1A_2B_1B_2CD$	$(2,4)(2,2)_2$
7a	-	-	1	2		1		-	$F = A_1CD$	$EF = B_1D$	$(2,2)(1,3)_2$
2c	-	-	1	2		0		-	$F = A_2CD$	$EF = A_1A_2B_1D$	$(2,3)(2,2)(1,3)$
7b	1	2	1	2				$E = A_1CD$	$F = B_1CD$	$EF = A_1B_1$	$(2,2)(1,3)_2$

↓	1a	$(A_1, A_2), (B_1, B_2), C, D, E, F$	↓	2a	$(A_1, A_2), (B_1, B_2), C, D, E, F$
	1b	$(A_1, A_1A_2), (B_1, B_1B_2), D, E, C, F$		2b	$(B_1, B_2), (A_1, A_1A_2), E, D, C, F$
↓	7a	$(A_1, A_2), (B_1, B_2), C, D, E, F$	↓	2c	$(B_1, B_2), (A_1A_2, A_1), E, D, F, C$
	7b	$(A_1, A_2), (B_1, B_2), F, D, E, C$			

TAB. 3.46 – Les fractions régulières  $4^22^4/4$  de résolution 4

La fraction 1a a le nombre minimum 1 de mots de longueur 4 et confond donc 6 interactions de deux facteurs par paire de deux :

$$(A_1A_2B_1B_2, EF), (A_1A_2E, B_1B_2F), (B_1B_2E, A_1A_2F) .$$

Sous l'hypothèse de nullité des interactions de 3 facteurs, elle permet donc d'estimer les 10 effets principaux et 33 effets d'interaction sur les 39. Il reste  $63 - (3 + 33 + 10) = 17$  f.e.b qui ne comprennent que des interactions de 3 facteurs et peuvent être utilisées pour estimer la variance d'erreur. La fraction privilégie les facteurs  $C, D$  puisqu'elle permet d'estimer

toutes leurs interactions avec un autre facteur et ne confond leurs effets principaux qu'avec des interactions de 4 facteurs.

Pour répartir cette fraction  $1a$  en blocs, on peut utiliser 1, 2 ou 3 des pseudofacteurs  $R_1 = A_2B_1B_2D$ ,  $R_2 = A_1A_2CD$ ,  $R_3 = A_2B_2$  selon que l'on désire une répartition en 2, 4 ou 8 blocs. Les confusions se déduisent des égalités du tableau 3.47, dans lesquelles on a souligné les interactions de deux facteurs.

$\mathbf{1}_B$	=	$\mathbf{1}_T$	=	$A_1B_1CDE$	=	$A_2B_2CDF$	=	$A_1A_2B_1B_2EF$
$R_1$	=	$A_2B_1B_2D$	=	$A_1A_2B_2CE$	=	$B_1CF$	=	$A_1DEF$
$R_2$	=	$A_1A_2CD$	=	$A_2B_1E$	=	$A_1B_2F$	=	$B_1B_2CDEF$
$R_1R_2$	=	$A_1B_1B_2C$	=	$B_2DE$	=	$A_1A_2B_1DF$	=	$A_2CEF$
$R_3$	=	<u><math>A_2B_2</math></u>	=	$A_1A_2B_1B_2CDE$	=	$CDF$	=	$A_1B_1EF$
$R_1R_3$	=	<u><math>B_1D</math></u>	=	$A_1CE$	=	$A_2B_1B_2CF$	=	$A_1A_2B_2DEF$
$R_2R_3$	=	$A_1B_2CD$	=	<u><math>B_1B_2E</math></u>	=	<u><math>A_1A_2F</math></u>	=	$A_2B_1CDEF$
$R_1R_2R_3$	=	$A_1A_2B_1C$	=	<u><math>A_2DE</math></u>	=	<u><math>A_1B_1B_2DF</math></u>	=	$B_2CEF$

TAB. 3.47 – *Confusions dans une fraction  $4^22^4/4$  en 8 blocs*

- Avec la répartition en 4 blocs définie par  $R_1$ ,  $R_2$ , les effets blocs ne sont confondus qu'avec des interactions de 3 facteurs ou plus. Sous l'hypothèse de nullité de ces dernières, les 10 effets principaux et 33 interactions de deux facteurs qui étaient non confondus restent donc non confondus. Les 3 f.e.b contenant les paires d'interactions restent également identiques. Les 3 effets blocs sont estimables avec la précision maximum et il reste  $14 = 17 - 3$  f.e.b pour estimer la variabilité intra bloc.
- Avec la répartition en 8 blocs définie par  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , les deux interactions  $A_2B_2$ ,  $B_1D$ , qui étaient non confondues sur la fraction, sont confondues respectivement avec les effets blocs  $R_3$  et  $R_1R_3$ . En outre, à la f.e.b qui contenait la paire d'interaction  $(A_1A_2F, B_1B_2E)$  s'ajoute l'effet bloc  $R_2R_3$ .

Cette répartition en bloc a été obtenue en effectuant une série de 10 recherches rétro-récurrentes des produits définissant  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  (cf § 3.11). A chaque nouvel essai, les produits possibles étaient essayés dans un ordre différent sélectionné au hasard. La non confusion des trois effets blocs  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_1R_2$  avec les interactions de deux facteurs était imposée. Sur les solutions obtenues, certaines confondent trois interactions de deux facteurs non préalablement confondues. La solution retenue ici a l'avantage de ne confondre que deux telles interactions.

Dans le cas qui avait été écarté, où  $D$ ,  $E$ ,  $F$  sont des produits des 5 facteurs  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$ , il est facile de vérifier que le seul type de fraction de résolution 4 est celui du tableau 3.48. Cette fraction peut être utilisée avec 64 unités en répétant deux fois chacun de ses traitements, ce qui revient à introduire un pseudofacteur de base  $R$  pour la répétition. Mais en pratique, son intérêt est surtout de permettre une étude en résolution 4 des 6 facteurs avec seulement 32 unités expérimentales, étude qui peut permettre de dégager rapidement les facteurs prépondérants à réétudier dans un plan ultérieur.

Une approche possible, pour obtenir des plans pour mélange de facteurs à 4 et 2 niveaux, est de regrouper par paire les facteurs de fractions  $2^{h-m}$  pour former les facteurs à 4 niveaux. A titre indicatif, le tableau 3.49 précise les 7 types de fractions  $2^{8-2}$  de résolution

Définition	$D = A_1B_1C, E = A_2B_2C, F = A_1A_2B_1B_2C$
Mots de définition	$A_1B_1CD, A_2B_2CE, A_1A_2B_1B_2DE,$ $A_1A_2B_1B_2CF, A_2B_2DF, A_1B_1EF, CDEF$
Profil	$(2,2)_6 (0,4)$

TAB. 3.48 – La fraction régulière  $4^22^4/8$  de résolution 4

4 et la façon dont s'établit leur correspondance avec les fractions du tableau 3.46. On voit que certaines fractions  $2^{8-2}$  ne sont pas utilisables, tandis que d'autres permettent d'obtenir plusieurs fractions  $4^22^4/4$  non équivalentes. Enfin, certaines fractions  $2^{h-m}$  non équivalentes peuvent donner des fractions  $4^22^4/4$  équivalentes. Il ne semble donc pas que la pratique du regroupement puisse faciliter dans le cas général la détermination les différents types de fraction d'un plan  $4^{h_4}2^{h_2}/2^m$ .

Dans cet exemple, la fraction  $4^22^4/4$  qui présente le moins d'aberration est la 1, dont la version 1a est définie par  $E = A_1B_1CD, F = A_2B_2CD$ . Quand on regarde cette fraction 1a comme une fraction pour facteurs a deux niveaux, son profil  $5_26_1$  est celui de la fraction  $2^{8-2}$  d'aberration minimale. Peut-on toujours dériver ainsi une fraction d'aberration minimale pour un mélange de facteurs à 4 et 2 niveaux d'une fraction d'aberration minimale pour facteurs à 2 niveaux? La question se pose.

n0	Définition	Profil	n0f4
1	$G = ABCDEF, H = ABCD, GH = EF$	$4_15_17_1$	1b
2	$G = ABCDE, H = BCDEF, GH = AF$	$4_16_2$	
3	$G = ABCDE, H = ABCF, GH = DEF$	$5_26_1$	1a
4	$G = ABCDE, H = ABC, GH = DE$	$4_26_1$	4,5,2c
5	$G = ABCD, H = ABCE, GH = DE$	$4_15_2$	2a,2b
6	$G = ABC, H = ABD, GH = CD$	$4_3$	3,7a,7b
7	$G = ABC, H = DEF, GH = ABCDEF$	$4_28_1$	6

TAB. 3.49 – Correspondance entre fractions  $2^{8-2}$  et fractions  $4^22^4/4$

n0f4 donne les numéros des fractions correspondantes du tableau 3.46

### 3.8.1 Nombre maximum de facteurs à 4 et 2 niveaux en résolution 3, 4, 5

De même que dans le cas symétrique, il est utile de connaître le nombre maximum de facteurs que l'on peut introduire avec un nombre d'unités  $N$  et une résolution  $R$  donnés. On va examiner cette question en cherchant d'abord la valeur maximum du nombre  $h_4$  de facteurs à 4 niveaux que l'on peut introduire quand il n'y a pas de facteur à 2 niveaux, puis en cherchant, pour chaque valeur fixée de  $h_4$  inférieure ou égale à ce seuil, le nombre maximum  $h_2$  de facteurs à 2 niveaux qu'il est possible d'introduire en plus des  $h_4$  facteurs à 4 niveaux.

## Résolution 3

Avec  $N = 4^s$  unités expérimentales, on peut introduire jusqu'à  $h_4 = (4^s - 1)/3$  facteurs à 4 niveaux dans une fraction régulière qui a alors un nombre de paramètres  $1 + 3h_4$  égal au nombre d'unités.

★ La technique permettant de construire une telle fraction saturée était déjà connue, par les travaux de Bose [1938] et Bose et Kishen [1940] sur les plans factoriels en blocs, lorsque Finney [1945] a introduit les fractions de plans. C'est en fait la même technique que celle déjà utilisée au paragraphe 3.5.4 pour former un plan saturé comportant  $(3^s - 1)/2$  facteurs à 3 niveaux, à ceci près que les niveaux des facteurs sont pris dans le corps  $\mathcal{F}_4$  à 4 éléments. Les facteurs sont des formes linéaires non colinéaires sur l'espace  $\mathcal{F}_4^s$ . Comme le corps  $\mathcal{F}_4$  s'identifie à  $\mathcal{F}_2^2$ , l'espace  $\mathcal{F}_4^s$  s'identifie à  $\mathcal{F}_2^{2s}$  et les formes linéaires à des applications linéaires de  $\mathcal{F}_2^{2s}$  sur  $\mathcal{F}_2^2$  dont les coordonnées fournissent les pseudofacteurs associés au facteur concerné. On pourra trouver un exemple détaillé d'application de cette technique dans Kobilinsky et Monod [1991].

Avec  $N = 2 \times 4^s$  unités, on peut introduire jusqu'à  $h_4 = 2(4^s - 1)/3 - 1 = (2 \times 4^s - 5)/3$  facteurs dans une fraction orthogonale. Ceci est un cas particulier d'un résultat général d'Addelman et Kempthorne [1961] déjà cité au paragraphe 3.5.4.

Wu [1989] a proposé une méthode simple pour définir le nombre maximum  $h_4$  de paires  $(A_1, A_2), (B_1, B_2), \dots$  de pseudofacteurs à 2 niveaux dans chacun des deux cas de figure  $N = 4^s, N = 2 \times 4^s$ . Sa construction, beaucoup plus simple que celle d'Addelman et Kempthorne, permet donc d'obtenir dans les deux cas une fraction régulière.

Pour un nombre  $h_4$  de facteurs à 4 niveaux inférieur ou égal au plafond, on peut, lorsque  $N$  est puissance de 2, introduire un nombre  $h_2$  de facteurs à 2 niveaux égal à  $N - (3h_4 + 1)$ , c'est-à-dire rendant le plan saturé. Le résultat de Wu montre en effet que l'on peut former dans ces cas une fraction régulière de résolution 3 avec les facteurs à 4 niveaux  $A, B, \dots$ . Les pseudofacteurs associés  $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots$  sont donc des produits des facteurs de base. La résolution 3 implique que les ensembles  $\{A_1, A_2, A_1 A_2\}, \{B_1, B_2, B_1 B_2\}, \dots$  sont deux à deux disjoints. Les  $N - (1 + 3h_4)$  produits ne figurant pas dans ces ensembles et distincts de 1 peuvent être utilisés pour définir les facteurs à 2 niveaux. Il est alors clair qu'on ne peut avoir de relation de définition impliquant seulement deux facteurs. En effet une relation  $XY = 1$  entre deux facteurs à 2 niveaux impliquerait  $X = Y$  et une relation du type  $XA_1 = 1, XA_2 = 1$  ou  $XA_1 A_2 = 1$  impliquerait que  $X$  appartienne à l'ensemble  $\{A_1, A_2, A_1 A_2\}$ . Le dispositif résultant est donc bien de résolution 3.

Dans le cas où  $N$  n'est pas puissance de 2, on peut également former des plans de résolution 3 pour mélanges de facteurs à 4 et 2 niveaux à partir de matrices d'Hadamard [Dey et Ramakrishna, 1977], [Chacko *et al*, 1979]. Le livre de Dey [1985], un ouvrage très complet sur les fractions asymétriques orthogonales, présente une synthèse claire de ces méthodes de construction.

#### Résolution 4

On peut utiliser la proposition de Margolin 3.6 pour majorer  $h_4$  et  $h_2$ . On sélectionne un facteur à 4 niveaux. Le nombre de paramètres associés aux interactions avec ce facteur est  $3h_2 + 9(h_4 - 1)$ . Si on y ajoute le nombre de paramètres  $1 + h_2 + 3h_4$  associés à la constante et aux effets principaux, on doit obtenir un nombre plus petit que le nombre

d'unités. Ceci donne l'inégalité

$$N \geq 4(h_2 + 3h_4 - 2) ,$$

d'où l'on déduit d'une part que  $h_4$  est majoré par  $N/12 + 2/3$  et d'autre part que, pour un  $h_4$  fixé,

$$h_2 \leq \frac{N}{4} - 3h_4 + 2 . \quad (3.62)$$

Dans les cas  $\{h_4 = 1, N = 16k\}$  et  $\{h_4 = 2, N = 8k\}$ , Margolin [1969] et Agrawal et Dey [1983] donnent des méthodes de construction de plans de résolution 4 ayant ce nombre maximum  $h_2$  de facteurs à 2 niveaux. Ces méthodes, qui partent d'une matrice d'Hadamard, s'apparentent à la technique de doublement par l'opposé déjà utilisée pour passer d'un plan de résolution 3 à un plan de résolution 4. On se reportera pour le cas  $h_4 = 2$ , un peu plus compliqué que le cas  $h_4 = 1$ , à l'article de Agrawal et Dey ou au livre de Dey [1985].

Le cas  $h_4 = 1$  mérite qu'on s'y attarde parce que la technique utilisée peut aussi servir à créer d'autres fractions orthogonales de résolution 4 intéressantes. Soit  $B$  la matrice  $4k \times (4k - 1)$  d'un plan de Plackett et Burman à  $4k$  unités. Considérons alors le plan défini par la matrice  $M$  suivante, de dimension  $(16k) \times (4k + 1)$

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & & \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & B & \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} & -B & \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & B & \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & -B & \end{bmatrix} .$$

Ce plan a  $N = 16k$  unités,  $h_2 = N/4 - 1$  facteurs à deux niveaux et 1 facteur  $A$  à 4 niveaux défini par les pseudofacteurs  $A_1, A_2$ . Il est de résolution 4 et son nombre de facteurs à 2 niveaux atteint la borne supérieure de Margolin. Dans le cas  $4k = 12$ , ce plan s'obtient en dupliquant la fraction du tableau 3.18, avec  $A_2$  à la place de  $L$  et en rajoutant un facteur  $A_1$  égal à  $-1$  sur la première partie, 1 sur la seconde. Autrement dit, ce plan est le *produit de Kronecker* entre la fraction à 24 unités du tableau 3.18 et le plan factoriel complet  $2^1$  pour l'unique pseudofacteur  $A_1$ . Ceci est vrai plus généralement quel que soit le nombre d'unités  $4k$  du plan de Plackett et Burman d'où l'on part. Le plan peut s'obtenir en deux étapes. D'abord le doublement par l'opposé avec rajout du pseudofacteur  $A_2$ , puis le produit de Kronecker par le plan  $2^1$  pour le second pseudofacteur à 2 niveaux.

Lorsque la construction part d'un plan de Plackett et Burman régulier, nous avons vu que le plan doublé par l'opposé est régulier. Le produit de Kronecker l'est alors également. En fait il a exactement les mêmes relations de définition que le plan doublé, mais un facteur de base de plus, le pseudofacteur  $A_1$ , qui n'apparaît donc pas dans ses relations de définition.

Ainsi, si on part comme au paragraphe 3.5.3 de la fraction  $2^{7-4}$  de Plackett et Burman définie par  $E = ABC, F = AB, G = AC, H = BC$ , et si on note  $D$  le facteur à 4 niveaux, le repliement donne la fraction définie par  $E = ABC, F = -ABD_2, G = -ACD_2,$

$H = -BCD_2$  et le produit de Kronecker la fraction définie par les mêmes relations mais avec un facteur de base  $D_1$  supplémentaire, fraction qui a donc  $N = 32$  unités.

Dans le cas symétrique, on a vu qu'on avait généralement intérêt, lorsqu'un facteur de base est absent des relations de définition génératrices, à l'inclure dans l'une d'entre elle au moins pour rallonger les mots de définition. Wu et Zhang [1993] ont remarqué que de façon similaire, lorsque  $A$  n'apparaît dans les mots de définition d'une fraction  $4^g 2^h / 2^m$  que sous une seule des trois formes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_1 A_2$ , on peut rallonger 1/4 des mots de définition en multipliant par une des deux autres formes un mot générateur où  $A$  ne figure pas déjà.

★ Considérons le cas d'une fraction régulière pour un mélange de facteurs à 4 et 2 niveaux. Supposons que l'un des pseudofacteurs  $A_1$  issu de la décomposition d'un facteur  $A$  à 4 niveaux est totalement absent des relations de définition génératrices.

Si  $A_2$  n'y figure pas non plus, le rajout de  $A_1$  à l'un des mots générateurs engendre son rajout à la moitié des mots de définition formée à partir de ce mot générateur. De même que dans le cas des facteurs à 2 niveaux, le plan après rajout est préférable, sauf si l'importance du facteur  $A$  justifie que l'on sacrifie de l'information sur les autres facteurs pour se donner un maximum d'information sur ce facteur  $A$ .

Si  $A_2$  figure dans les mots de définition, donc dans la moitié d'entre eux, et si il y a au moins 2 mots générateurs, on peut s'arranger quitte à remplacer deux mots générateurs contenant  $A_2$  par leur produit, pour qu'un des mots générateurs au moins ne contienne pas  $A_2$ . Le rajout de  $A_1$  à ce mot augmente alors de 1 le nombre de facteurs dans le quart des mots de définition. En effet, sur les mots de définition formé en excluant ce mot générateur, une moitié contiennent  $A_2$ , l'autre pas. En multipliant la moitié contenant  $A_2$  par le mot générateur rallongé, on obtient des mots qui contiennent  $A_1 A_2$  au lieu de  $A_2$  et ont donc même longueur. En revanche, la multiplication de l'autre moitié rajoute le facteur  $A$  et augmente de 1 la longueur.

Ce résultat suggère qu'on a intérêt à ne retenir que des fractions où  $A$  apparaît sous ses trois formes dans les mots de définition. Mais il s'avère, en résolution 4, que les fractions respectant cette condition ne sont pas nécessairement celles qui permettent d'estimer le plus grand nombre d'interactions de deux facteurs.

Ainsi, le rajout de  $D_1$  au mot  $ABCE$  qui ne contient pas  $D_2$  dans l'exemple précédent a pour effet de rajouter le facteur  $D$  au quart des mots de définition (tableau 3.50), ce qui fait passer leur longueur de 4 à 5. Cependant, la fraction ainsi obtenue ne comporte que 8 contrastes d'interaction non confondus alors que la fraction initiale sans  $D_1$  en comporte 14.

Dans le cas  $\{h_4 = 3, N = 16k\}$ , Agrawal et Dey [1983] proposent aussi une technique de construction basée sur une matrice d'Hadamard. Mais le nombre maximum  $h_2 = 4k - 12$  de facteurs à 2 niveaux obtenus par cette méthode est nettement inférieur à la limite  $4k - 7$  de Margolin. Si  $k$  est puissance de 2, il est aussi inférieur à la limite qu'il est possible d'atteindre avec un plan régulier.

Le tableau 3.51 précise les limites pour  $h_2$  et  $h_4$  dans un plan régulier de résolution 4 et pour un nombre d'unités  $N = 2^s$  inférieur à 128.

★ Ces limites ont été obtenues par recherche rétro-récurrente, en prenant comme facteurs de base

Mots de définition							
fraction sans $D_1$				après rajout de $D_1$			
<u>1</u>	<u>BCFG</u>	<u>ACFH</u>	<u>ABGH</u>	<u>1</u>	<u>BCFG</u>	<u>ACFH</u>	<u>ABGH</u>
<u>ABD<sub>2</sub>F</u>	<u>ACD<sub>2</sub>G</u>	<u>BCD<sub>2</sub>H</u>	<u>D<sub>2</sub>FGH</u>	<u>ABD<sub>2</sub>F</u>	<u>ACD<sub>2</sub>G</u>	<u>BCD<sub>2</sub>H</u>	<u>D<sub>2</sub>FGH</u>
<u>ABCE</u>	<u>A EFG</u>	<u>BEFH</u>	<u>CEGH</u>	<u>ABCD<sub>1</sub>E</u>	<u>AD<sub>1</sub>EFG</u>	<u>BD<sub>1</sub>EFH</u>	<u>D<sub>1</sub>CEGH</u>
<u>CD<sub>2</sub>EF</u>	<u>BD<sub>2</sub>EG</u>	<u>AD<sub>2</sub>EH</u>	<u>ABCD<sub>2</sub>EFGH</u>	<u>CD<sub>1</sub>D<sub>2</sub>EF</u>	<u>BD<sub>1</sub>D<sub>2</sub>EG</u>	<u>AD<sub>1</sub>D<sub>2</sub>EH</u>	<u>ABCD<sub>1</sub>D<sub>2</sub>EFGH</u>
profil : (1,7)(1,3) <sub>7</sub> (0,4) <sub>7</sub>				profil : (1,7)(1,4) <sub>4</sub> (1,3) <sub>7</sub> (0,4) <sub>3</sub>			
effets confondus							
(D <sub>2</sub> A,CG,EH,BF), (D <sub>2</sub> B,CH,EG,AF), (D <sub>2</sub> C,BH,EF,AG), (D <sub>2</sub> E,AH,BG,CF), (D <sub>2</sub> F,AB,GH,CE), (D <sub>2</sub> G,AC,BE,FH), (D <sub>2</sub> H,BC,FG,AE)				(D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> A,EH), (D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> B,EG), (D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> C,EF), (D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> F,CE), (D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> G,BE), (D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> H,AE), (D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> E,AH,BG,CF), (D <sub>2</sub> A,CG,BF), (D <sub>2</sub> B,CH,AF), (D <sub>2</sub> C,BH,AG), (D <sub>2</sub> F,AB,GH), (D <sub>2</sub> G,AC, FH), (D <sub>2</sub> H,BC,FG)			
effets non confondus							
D <sub>1</sub> ; D <sub>2</sub> ; D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> ; A; B; C; E; F; G; H D <sub>1</sub> A; D <sub>1</sub> B; D <sub>1</sub> C; D <sub>1</sub> E; D <sub>1</sub> F; D <sub>1</sub> G; D <sub>1</sub> H D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> A; D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> B; D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> C; D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> E D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> F; D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> G; D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> H				D <sub>1</sub> ; D <sub>2</sub> ; D <sub>1</sub> D <sub>2</sub> ; A; B; C; E; F; G; H D <sub>1</sub> A; D <sub>1</sub> B; D <sub>1</sub> C; D <sub>1</sub> E; D <sub>1</sub> F; D <sub>1</sub> G; D <sub>1</sub> H; D <sub>2</sub> E			
d.d.l résiduels							
0				0			

TAB. 3.50 – Deux fractions régulières saturées  $4 \times 2^7/16$  de résolution 4

Parmi les mots de définition, ceux qui sont soulignés sont des mots générateurs.  
Les 4 mots qui augmentent de longueur sont ceux qui figurent sur la 3ème ligne  
débutant par *ABCE*.

autant de facteurs à 4 niveaux que possible. D'après la proposition 3.8, un tel choix ne restreint pas la gamme des plans réguliers qu'il est possible d'obtenir, puisqu'avec 128 données on peut introduire au maximum 3 facteurs de base à 4 niveaux et, qu'en résolution 4, il ne peut exister de relation entre ces trois facteurs.

$h_4$	$N$	8	16	32	64	128
0		4 (4)	8 (8)	16 (16)	32 (32)	64 (64)
1		1 (1)	3 (3)	7 (7)	15 (15)	31 (31)
2			0 (0)	4 (4)	12 (12)	28 (28)
3				*** (1)	7 (9)	$\geq$ 23 (25)
4					4 (6)	$\geq$ 20 (22)
5					2 (3)	$\geq$ 18 (19)
6					0 (0)	16 (16)
7						(13)
7						(10)
7						(7)
7						(4)
11						(1)

TAB. 3.51 – *Sup. de  $h_2$  pour fraction régulière d'un  $4^{h_4}2^{h_2}$ , résolution 4, taille  $N$*

Le nombre entre parenthèse est la limite supérieure de Margolin pour  $h_2$  et le trait horizontal indique la limite supérieure de Margolin pour  $h_4$  quand  $h_2 = 0$ . Lorsque  $N = 32$ , cette dernière limite est égale à 3 et ne peut pas être atteinte. Pour  $N = 128$  et  $h_4 = 3,4,5$ , la recherche effectuée, qui ne prend pas en compte les symétries, est très longue et le programme a été interrompu avant d'avoir exploré toutes les possibilités.

**Résolution 5** Avec  $h_4$  facteurs à 4 niveaux et  $h_2$  facteurs à 2 niveaux, le nombre de paramètres du modèle de plein rang incluant la moyenne générale, les effets principaux et interactions de deux facteurs est

$$1 + 3h_4 + h_2 + 9h_4(h_4 - 1)/2 + 3h_4h_2 + h_2(h_2 - 1)/2 .$$

Ce nombre de paramètres doit être inférieur ou égal au nombre  $N$  d'unités ce qui conduit à l'inégalité :

$$h_2^2 + (6h_4 + 1)h_2 + 9h_4^2 - 3h_4 - 2(N - 1) \leq 0 .$$

Ceci implique en particulier que  $9h_4^2 - 3h_4 - 2(N - 1) \leq 0$ , d'où l'on déduit

$$h_4 \leq \frac{3 + \sqrt{9 + 72(N - 1)}}{18} ,$$

et pour  $h_4$  fixé

$$h_2 \leq \frac{-(6h_4 + 1) + \sqrt{8N - 7 + 24h_4}}{2} . \quad (3.63)$$

Ces bornes ne sont pas atteintes si l'on impose au plan la régularité. Les majorants obtenus par recherche rétro-récurrente dans ce cas figurent au tableau 3.52.

$h_4$	$N$	8	16	32	64	128	256
0		3 (3)	5 (5)	6 (7)	8 (10)	11 (15)	17 (22)
1		1 (1)	1 (2)	4 (4)	6 (8)	9 (12)	(19)
2			0 (0)	1 (2)	3 (5)	6 (9)	(16)
3					0 (2)	3 (7)	$\geq 9$ (13)
4						*** (4)	6 (10)
5						*** (1)	0 (7)
6							*** (4)
7							*** (2)

TAB. 3.52 – *Sup. de  $h_2$  pour fraction régulière d'un  $4^{h_4}2^{h_2}$ , résolution 5, taille  $N$*

Le nombre entre parenthèses est la limite donnée par 3.63. Les trois étoiles indiquent l'impossibilité d'atteindre le nombre  $h_4$  de la ligne avec un plan régulier.

### 3.8.2 Plan de résolution 3, repliable en plan de résolution 4

La robustesse dont on bénéficie pour l'estimation des effets principaux dans un plan de résolution 4 a comme contrepartie le nombre relativement limité de facteurs qui peuvent être pris en compte. A l'inverse, la résolution 3 permet d'étudier un nombre de facteurs beaucoup plus important mais elle peut conduire à des résultats difficiles à interpréter quand il y a trop de f.e.b significatives en sortie.

Dans le cas des facteurs à 2 niveaux, si les résultats d'un plan de résolution 3 sont trop ambigus, on peut toujours poursuivre l'expérimentation de façon à atteindre la résolution 4 en réalisant le plan opposé (cf § 3.5.3). Pour un plan régulier comportant des facteurs à 4 niveaux décomposés en deux pseudofacteurs, le doublement par l'opposé conduit aussi à la résolution 4 si le plan initial possède, outre la résolution 3, la propriété de ne comporter aucun mot de longueur 3 avec un nombre pair de symboles.

Ainsi, soit  $A_1A_2B_1E$  un mot de définition de la fraction initiale. C'est un mot de longueur 3 mais où la lettre  $A$  apparaît deux fois et qui contient donc 4 symboles  $A_1, A_2, B_1, E$ . Sur le plan opposé, où  $A_1, A_2, B_1, E$  prennent les signes opposés, la relation  $A_1A_2B_1E = 1$  est également vérifiée. Le plan doublé par son opposé garde donc ce même mot de longueur 3. Il en est de même si la fraction initiale contient un mot à 6 symboles comme  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ .

En revanche, pour tout mot tel que  $A_1B_1E$  contenant trois symboles, le signe est changé sur l'opposé et la relation de définition associée disparaît du plan doublé. Il en est de même avec un mot de longueur 3 et 5 symboles tel que  $A_1A_2B_1B_2E$ .

Par exemple, avec 16 unités et  $h_4 = 1$  facteur à 4 niveaux, la borne supérieure pour le nombre de facteurs à 2 niveaux est  $h_2 = 3$  en résolution 4,  $h_2 = 12$  en résolution 3. Si l'on impose que les mots de longueur 3 comporte un nombre impair de symboles, on arrive par recherche rétro-récurrente à la limite  $h_2 = 6$ . De possibles relations de définition pour cette valeur limite de  $h_2$  sont précisées au tableau 3.53. La manière d'imposer dans la recherche l'absence de mot de longueur 3 comportant un nombre pair de symboles est précisée au paragraphe 3.11. Les mots de définition du plan doublé sont les mots comportant un

nombre pair de symboles qui ont donc au minimum la longueur 4.

Si on rajoute au plan doublé un facteur  $R$  prenant le niveau 1 sur le plan initial,  $-1$  sur son opposé, il faut rajouter les mots de définition produits de  $R$  par un des mots de définition initiaux comportant un nombre impair de symboles. Ce plan avec  $R$  est donc également de résolution 4.

Définition du plan	$D = A_1A_2BC, E = A_2B, F = A_2BC, G = A_2C$
Mots à nb. impair de symboles	$BFG; CEF; A_1DF; A_2BE; A_2CG$ $A_1A_2DEG; A_1A_2BCD; A_1BCDEFG$
Mots à nb. pair de symboles	$BCEG; A_1BDG; A_1CDE; A_2EFG$ $A_2BCF; A_1A_2BDEF; A_1A_2CDFG$

TAB. 3.53 – Plan  $4^12^6/16$  de résolution 3 repliable en plan de résolution 4

### 3.9 Passage de 4 à 3 niveaux par agrégation de niveaux

Addelman [1962] a proposé une méthode simple pour construire des fractions de plan combinant des facteurs à 2, 3 et 4 niveaux. On fait d’abord comme si les facteurs à 3 niveaux avaient 4 niveaux au lieu de 3 et on construit, par les techniques du paragraphe 3.8, un plan ayant les propriétés requises. Pour passer de 4 à 3 niveaux, on agrège ensuite 2 des 4 niveaux en un seul. Après avoir explicité sur un petit exemple les propriétés de ce type de construction, on en illustre l’intérêt dans un cas plus compliqué.

**Exemple 3.6 .**  $A, B, C$  sont trois facteurs ayant respectivement 3, 2 et 2 niveaux. On désire construire une fraction de résolution 3 avec 8 unités

On fait tout d’abord comme si  $A$  avait 4 niveaux et on le décompose en 2 pseudofacteurs  $A_1, A_2$  à deux niveaux de la façon usuelle. On peut alors facilement obtenir une fraction à 8 unités de résolution 3, par exemple celle définie par  $C = A_1A_2B$ . Pour ramener à 3 le nombre de niveaux de  $A$ , on *agrège* deux niveaux, par exemple les deux niveaux médians, de la façon indiquée à gauche du tableau 3.54 où la paire  $(A_1, A_2)$  et  $A_0$  donne le niveau avant agrégation et  $A$  le niveau correspondant après agrégation. À droite du tableau 3.54 figurent les fractions avant et après agrégation. Celle obtenue après agrégation est ultérieurement désignée par fraction  $f_1$ .

Après agrégation, certains traitements initialement distincts deviennent identiques et leurs effets doivent alors être égaux, ce qui ajoute des contraintes au modèle. Le raisonnement qui a conduit à la proposition 3.5 montre que cette restriction du modèle ne peut qu’améliorer la précision d’estimation des contrastes non nuls et que le plan résultant bénéficie au minimum des qualités du plan avant agrégation.

Il est intéressant d’aller plus loin dans l’analyse et de déduire les propriétés du plan après agrégation de celles du plan initial. Les traitements  $(-1, 1, B, C)$  et  $(1, -1, B, C)$  du

				Fraction initiale ( $C = A_1 A_2 B$ )					Frac. après agrég. ( $f_1$ )		
$A_1$	$A_2$	$A_0$	$A$	$A_1$	$A_2$	$B$	$C$	$A_0$	$A$	$B$	$C$
-1	-1	0	0	1	1	1	1	3	2	1	1
-1	1	1	1	1	1	-1	-1	3	2	-1	-1
1	-1	2	1	1	-1	1	-1	2	1	1	-1
1	1	3	2	1	-1	-1	1	2	1	-1	1
				-1	1	1	-1	1	1	1	-1
				-1	1	-1	1	1	1	-1	1
				-1	-1	1	1	0	0	1	1
				-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1

TAB. 3.54 – Création d'une fraction d'un  $3^1 2^2$  à partir d'une fraction  $4^1 2^2 / 2$

plan initial deviennent un même traitement après agrégation et les réponses théoriques associées sont donc égales :

$$\tau(-1, 1, B, C) = \tau(1, -1, B, C) . \quad (3.64)$$

Ces égalités modifient l'interprétation des effets factoriels  $e(A_1^{a_1} A_2^{a_2} B^b C^c)$  classiquement utilisés pour analyser la fraction  $4^1 2^2 / 2$ . Elles entraînent d'autre part que pour tout produit  $V = B^b C^c$ , on a

$$e(A_2 V) = e(A_1 V) . \quad (3.65)$$

Pour expliciter et prouver ces résultats, considérons la situation plus simple d'un plan contenant le facteur  $A$  et un unique facteur  $B$  à deux niveaux. On a

$$\begin{aligned} e(A_1^{a_1} A_2^{a_2} B^b) &= \frac{1}{8} \sum_{A_1, A_2, B} A_1^{a_1} A_2^{a_2} B^b \tau(A_1, A_2, B) \\ &= \frac{1}{2} \sum_B B^b \frac{1}{4} \sum_{A_1, A_2} A_1^{a_1} A_2^{a_2} \tau(A_1, A_2, B) , \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire

$$e(A_1^{a_1} A_2^{a_2} B^b) = \frac{1}{2} \sum_B B^b e(A_1^{a_1} A_2^{a_2} / B) \quad (3.66)$$

en posant

$$e(A_1^{a_1} A_2^{a_2} / B) = \sum_{A_1, A_2} A_1^{a_1} A_2^{a_2} \tau(A_1, A_2, B) / 4 . \quad (3.67)$$

Cette dernière somme s'interprète comme un effet de  $A$  pour  $B$  fixé et ses valeurs pour  $B = 1$  et  $-1$  sont notées  $e(A_1^{a_1} A_2^{a_2} / B = 1)$  et  $e(A_1^{a_1} A_2^{a_2} / B = -1)$  dans ce qui suit. Le développement de la somme dans (3.67) pour chacun des 4 effets associés aux 4 couples  $(a_1, a_2)$  d'exposants 0 ou 1 donne

$$\begin{aligned} e(\mathbf{1}/B) &= [ \tau(-1, -1, B) + \tau(-1, 1, B) + \tau(1, -1, B) + \tau(1, 1, B) ] / 4, \\ e(A_2/B) &= [ -\tau(-1, -1, B) + \tau(-1, 1, B) - \tau(1, -1, B) + \tau(1, 1, B) ] / 4, \\ e(A_1/B) &= [ -\tau(-1, -1, B) - \tau(-1, 1, B) + \tau(1, -1, B) + \tau(1, 1, B) ] / 4, \\ e(A_1 A_2/B) &= [ \tau(-1, -1, B) - \tau(-1, 1, B) - \tau(1, -1, B) + \tau(1, 1, B) ] / 4, \end{aligned} \quad (3.68)$$

Pour plus de clarté, le traitement  $(A_1, A_2, B)$  et la réponse théorique associée  $\tau(A_1, A_2, B)$  sont notés  $(A, B)$  et  $\mu(A, B)$ , de sorte que

$$\begin{aligned}\mu(0, B) &= \tau(-1, -1, B), & \mu(2, B) &= \tau(1, 1, B), \\ \mu(1, B) &= \tau(-1, 1, B) = \tau(1, -1, B).\end{aligned}\tag{3.69}$$

Le système (3.68) s'écrit alors

$$\begin{aligned}e(\mathbf{1}/B) &= [\mu(0, B) + 2\mu(1, B) + \mu(2, B)]/4, \\ e(A_2/B) &= [-\mu(0, B) + \mu(2, B)]/4, \\ e(A_1/B) &= [-\mu(0, B) + \mu(2, B)]/4, \\ e(A_1 A_2/B) &= [\mu(0, B) - 2\mu(1, B) + \mu(2, B)]/4.\end{aligned}\tag{3.70}$$

Il est clair que  $e(A_2/B) = e(A_1/B)$ . On en déduit, en utilisant (3.66), l'égalité  $e(A_1 B^b) = e(A_2 B^b)$  équivalente de (3.65) dans ce cas de figure simplifié. On en déduit également les expressions des effets factoriels  $e(A_1^{a_1} A_2^{a_2} B^b)$  figurant au tableau 3.55, d'où découle l'interprétation de ces effets après agrégation.

$$\begin{aligned}e(\mathbf{1}) = e(B^0) &= [e(\mathbf{1}/B = 1) + e(\mathbf{1}/B = -1)]/2 \\ &= [\mu(0, 1) + 2\mu(1, 1) + \mu(2, 1) + \mu(0, -1) + 2\mu(1, -1) + \mu(2, -1)]/8 \\ e(B) &= [e(\mathbf{1}/B = 1) - e(\mathbf{1}/B = -1)]/2 \\ &= [(\mu(0, 1) + 2\mu(1, 1) + \mu(2, 1))/4 - (\mu(0, -1) + 2\mu(1, -1) + \mu(2, -1))/4]/2 \\ &= [\mu(0, 1) - \mu(0, -1) + 2(\mu(1, 1) - \mu(1, -1)) + \mu(2, 1) - \mu(2, -1)]/8 \\ e(A_2) = e(A_1) &= [e(A_1/B = 1) + e(A_1/B = -1)]/2 = [\bar{\mu}(2, \cdot) - \bar{\mu}(0, \cdot)]/4 \\ e(A_1 A_2) &= [e(A_1 A_2/B = 1) + e(A_1 A_2/B = -1)]/2 = [(\bar{\mu}(0, \cdot) + \bar{\mu}(2, \cdot))/2 - \bar{\mu}(1, \cdot)]/2 \\ e(A_2 B) = e(A_1 B) &= [e(A_1/B = 1) - e(A_1/B = -1)]/2 \\ &= [(\mu(2, 1) - \mu(0, 1)) - (\mu(2, -1) - \mu(0, -1))]/8 \\ e(A_1 A_2 B) &= [(\mu(2, 1) + \mu(0, 1) - 2\mu(1, 1)) - (\mu(2, -1) + \mu(0, -1) - 2\mu(1, -1))]/8\end{aligned}$$

TAB. 3.55 - *Expression des effets factoriels après agrégation*

La moyenne générale  $e(\mathbf{1})$  est après agrégation une moyenne pondérée des réponses théoriques des traitements qui donne un poids double au niveau 1 de  $A$ . De même, l'effet principal de  $B$  s'exprime comme la demi-différence entre des moyennes pondérées des réponses théoriques aux deux niveaux de  $B$ , ou encore comme une moyenne pondérée des effets de  $B$  aux différents niveaux de  $A$ . L'effet principal  $e(A_2) = e(A_1)$  oppose les niveaux 2 et 0 du facteur  $A$ . C'est, à la division par 4 près, le contraste  $\{2 \text{ versus } 0\}$  de  $A$ . L'effet principal  $e(A_1 A_2)$  oppose la moyenne des niveaux 0, 2 au niveau 1 : c'est le contraste  $\{(0, 2) \text{ versus } 1\}$  de  $A$ . Les interactions  $e(A_2 B)$  et  $e(A_1 A_2 B)$  sont les interactions avec  $B$  de ces contrastes.

Revenons au cas de la fraction  $f_1$  pour 3 facteurs  $A, B, C$ . L'interprétation des effets  $e(A_1^{a_1} A_2^{a_2} B^b C^c)$  y est exactement analogue. Les estimateurs des moindres carrés et leurs variances se déduisent simplement des expressions des f.e.b. Compte tenu de (3.65),

les espérances des estimations  $\hat{\gamma}(V) = \langle \mathbf{y}, V \rangle / 8$  de f.e.b prennent la forme suivante où n'apparaissent que les 12 effets factoriels réellement distincts :

$$\begin{aligned}
E(\hat{\gamma}(\mathbf{1})) &= e(\mathbf{1}) + e(A_1 A_2 B C), & E(\hat{\gamma}(B)) &= e(B) + e(A_1 A_2 C), \\
E(\hat{\gamma}(A_1)) &= e(A_1) + e(A_1 B C), & E(\hat{\gamma}(A_1 B)) &= e(A_1 B) + e(A_1 C), \\
E(\hat{\gamma}(A_2)) &= e(A_1) + e(A_1 B C), & E(\hat{\gamma}(A_2 B)) &= e(A_1 B) + e(A_1 C), \\
E(\hat{\gamma}(A_1 A_2)) &= e(A_1 A_2) + e(B C), & E(\hat{\gamma}(A_1 A_2 B)) &= e(A_1 A_2 B) + e(C).
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Sous l'hypothèse usuelle (3.17), ces estimations sont non corrélées et de même variance  $\sigma^2/8$ . Les propriétés de la fraction après agrégation en découlent immédiatement. Tout d'abord, les différences

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\gamma}(A_1) - \hat{\gamma}(A_2)), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\gamma}(A_1 B) - \hat{\gamma}(A_2 B)) \tag{3.72}$$

ont une espérance nulle et sont également non corrélées de variance  $\sigma^2/8$ . Elles peuvent donc être utilisées pour estimer cette variance. Les estimateurs des moindres carrés des f.e.b  $e(A_1) + e(A_1 B C)$  et  $e(A_1 B) + e(A_1 C)$  sont

$$\begin{aligned}
e(A_1) + \widehat{e(A_1 B C)} &= (\hat{\gamma}(A_1) + \hat{\gamma}(A_2)) / 2, \\
e(A_1 B) + \widehat{e(A_1 C)} &= (\hat{\gamma}(A_1 B) + \hat{\gamma}(A_2 B)) / 2.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Leur variance  $\sigma^2/16$  est deux fois plus petite que celle des estimations  $\hat{\gamma}(\mathbf{1})$ ,  $\hat{\gamma}(A_1 A_2)$ ,  $\hat{\gamma}(B)$ ,  $\hat{\gamma}(A_1 A_2 B)$  des 4 autres f.e.b.

Sous l'hypothèse que les interactions de deux facteurs et plus sont nulles,  $(\hat{\gamma}(A_1 B) + \hat{\gamma}(A_2 B)) / \sqrt{2}$  a aussi une espérance nulle et peut être adjoint aux deux combinaisons linéaires des observations figurant dans (3.72) pour obtenir une estimation de  $\sigma^2/8$  basée sur 3 degrés de liberté. Les autres estimations  $(\hat{\gamma}(A_1) + \hat{\gamma}(A_2)) / 2$ ,  $\hat{\gamma}(A_1 A_2)$ ,  $\hat{\gamma}(B)$ ,  $\hat{\gamma}(A_1 A_2 B)$  estiment respectivement  $e(A_1)$ ,  $e(A_1 A_2)$ ,  $e(B)$ ,  $e(C)$ , c'est-à-dire tous les degrés de liberté des effets principaux. On retrouve ainsi que la fraction obtenue après agrégation hérite de la résolution 3 de la fraction initiale. Elle hérite aussi des propriétés d'orthogonalité et permet d'estimer l'effet principal de chaque facteur sans perte de précision due aux autres facteurs.

Ainsi l'effet principal  $e(B)$  est estimé, comme si  $B$  était l'unique facteur, par la demi-différence  $\langle \mathbf{y}, B \rangle / 8$  entre les moyennes aux niveaux 1 et  $-1$  de  $B$  qui a pour variance  $\sigma^2/8$ . De même  $e(A_1)$  est estimé par  $(\hat{\gamma}(A_1) + \hat{\gamma}(A_2)) / 2 = \langle \mathbf{y}, A_1 + A_2 \rangle / 16$ , quart de la différence entre les moyennes aux niveaux 2 et 0 de  $A$ , qui a la variance  $\sigma^2/16$ .

Pour un tel dispositif où les niveaux d'un des facteurs ne sont pas également représentés, l'orthogonalité n'implique pas nécessairement l'optimalité. Cette question sera discutée plus en détail au paragraphe 3.10. Notons simplement que, du fait que le niveau 1 est deux fois plus représenté que les niveaux 0 et 2, le contraste  $\{2 \text{ versus } 0\}$  de  $A$  est a priori désavantagé par rapport à un plan où les unités sont plus uniformément réparties entre les niveaux de  $A$ .

Si les interactions de deux facteurs ne sont pas supposées toutes nulles, on revient aux expressions (3.71) des f.e.b pour connaître les propriétés de la fraction. Les résultats peuvent être interprétés comme dans le cas d'une fraction régulière (cf § 3.3).

La situation est un peu plus complexe si on agrège les niveaux  $(-1, -1)$  et  $(-1, 1)$  de  $(A_1, A_2)$  comme indiqué à gauche du tableau 3.56. Dans la fraction résultante, désignée par  $f_2$  ultérieurement, on note **1** le niveau deux fois plus représenté pour faciliter la comparaison avec la fraction  $f_1$  précédente. Les colonnes **1**,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_1A_2$  figurant à gauche du tableau 3.56 donnent, à la division par 4 près, les coefficients à appliquer aux espérances  $\mu(A, B, C)$  pour obtenir les effets  $e(\mathbf{1}/B, C)$ ,  $e(A_1/B, C)$ ,  $e(A_2/B, C)$ ,  $e(A_1A_2/B, C)$  de  $A$  pour des niveaux  $B$  et  $C$  fixés. Comme précédemment, les  $e(\mathbf{1}/B, C)$  sont des moyennes pondérées donnant un poids double au niveau 1 de  $A$ . L'effet  $e(A_2/B, C) = e(A_1A_2/B, C)$  oppose les niveaux 2 et 0 de  $A$ , tandis que  $e(A_1/B, C)$  oppose la moyenne de ces deux niveaux au niveau 1. Par suite, les effets factoriel  $e(B^bC^c)$  sont des moyennes sur  $A$  qui donnent un poids double au niveau 1. L'effet  $e(A_2B^bC^c) = e(A_1A_2B^bC^c)$  s'interprète comme le contraste  $\{2 \text{ versus } 0\}$  de l'effet principal de  $A$  si  $b = c = 0$ , comme une interaction avec ce contraste si  $b \neq 0$  ou  $c \neq 0$ . Enfin  $e(A_1B^bC^c)$  s'interprète comme le contraste  $\{(2, 0) \text{ versus } 1\}$  de  $A$  ou comme une interaction avec ce contraste de  $B^bC^c$ .

Le remplacement de  $e(A_1A_2B^bC^c)$  par  $e(A_2B^bC^c)$  conduit aux f.e.b figurant à droite du tableau 3.56. Ces f.e.b sont regroupées par groupe de deux de telle façon que les effets factoriels figurant dans ces groupes forment des ensembles disjoints. On peut donc considérer chaque groupe isolément. Il est alors clair que les effets factoriels figurant dans un groupe sont estimables si et seulement si deux au plus de ces effets sont non nuls. Ainsi, si l'interaction des trois facteurs est supposée nulle, on a  $e(A_1BC) = 0$  et on peut estimer  $e(A_2)$  par  $\hat{\gamma}(A_2)$ , puis  $e(BC)$  par  $\hat{\gamma}(A_1A_2) - \hat{\gamma}(A_2)$ .

$A_0$	<b>1</b>	$A_1$	$A_2$	$A_1A_2$	$A$	$\mu(A, B, C)$	$\begin{cases} \gamma(\mathbf{1}) = e(\mathbf{1}) + e(A_2BC) \\ \gamma(A_1) = e(A_1) + e(A_2BC) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma(B) = e(B) + e(A_2C) \\ \gamma(A_1B) = e(A_1B) + e(A_2C) \end{cases}$
0	1	-1	-1	1	1	$\mu(1, B, C)$	
1	1	-1	1	-1	1	$\mu(1, B, C)$	
2	1	1	-1	-1	0	$\mu(0, B, C)$	
3	1	1	1	1	2	$\mu(2, B, C)$	
							$\begin{cases} \gamma(A_2) = e(A_2) + e(A_1BC) \\ \gamma(A_1A_2) = e(A_2) + e(BC) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma(A_2B) = e(A_2B) + e(A_1C) \\ \gamma(A_1A_2B) = e(A_2B) + e(C) \end{cases}$

TAB. 3.56 – Agrégation niveaux  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  d'un  $4^12^2/2$  conduisant à  $f_2$

Sous l'hypothèse de nullité des interactions, cette fraction  $f_2$  a les mêmes propriétés que la précédente. Les effets principaux  $e(A_2)$ ,  $e(A_1)$ ,  $e(B)$  et  $e(C)$  sont estimés orthogonalement avec la variance  $\sigma^2/16$  pour  $e(A_2)$ ,  $\sigma^2/8$  pour les autres. Il reste 3 degrés de liberté pour estimer la variance d'erreur  $\sigma^2$ . Cependant, l'examen des f.e.b montre clairement les différences avec la fraction  $f_1$  précédente. Il n'y a pas dans cette seconde fraction de traitement répété permettant d'estimer une variance d'erreur pure. En revanche, sous la seule hypothèse que l'interaction des 3 facteurs est nulle, on peut estimer sans biais les trois effets  $e(A_1)$ ,  $e(A_2)$ ,  $e(BC)$  alors que sous la même hypothèse, seul l'effet  $e(A_1)$ , qui était alors le contraste  $\{2 \text{ versus } 0\}$ , était estimable dans la première fraction.

**Exemple 3.7 .** On étudie l'influence, sur la texture du fromage d'Arzúa-Ulloa, de 7 facteurs  $A, B, C, D, E, F, G$  caractéristiques du processus de fabrication (moment de salage, addition de calcium, quantité de levain, etc ...). Dans un premier temps, ces facteurs peuvent être étudiés à 2 niveaux, sauf le premier d'entre eux, le moment de salage  $A$ , qui doit être impérativement étudié à 3 niveaux. Pour cette première phase,

sont prévues 32 fabrications qui peuvent être groupées par bloc de 4 ou 8 correspondant aux fabrications réalisées soit sur une, soit sur deux journées.

La résolution 5 n'est pas atteignable puisque le modèle incluant les interactions de deux facteurs a 36 paramètres. Pour former un plan de résolution 4, on fait tout d'abord comme si  $A$  avait 4 niveaux et on construit une fraction régulière  $1/8$  de résolution 4 du plan factoriel complet  $4 \times 2^6$ . A une équivalence près, les deux seules fractions possibles sont celles définies en haut du tableau 3.57. Ce tableau précise aussi les mots de définition, les profils associés, les interactions confondues et non confondues et les degrés de liberté résiduels. Dans ce même tableau sont indiquées des relations de définition possibles pour les blocs, définis par les pseudofacteurs  $j_1, j_2, j_3$ . Il a été possible de choisir ces relations, par recherche rétro-récurrente, en évitant de confondre avec les blocs les effets principaux et les interactions estimables avant répartition en blocs. Les effets blocs ont été mis entre crochets pour les distinguer plus facilement des effets traitements.

Définition	Type 1 $E = A_1BCD, F = A_2BC, G = A_2BD$	Type 2 $E = A_1BC, F = A_1BD, G = A_1CD$
blocs	$j_1 = A_2B, j_2 = A_2C, j_3 = A_2D$	$j_1 = A_1B, j_2 = A_1C, j_3 = A_1D$
mots de définition	$A_1BEFG, A_1BCDE, A_1A_2DEF,$ $A_1A_2CEG, A_2BDG, A_2BCF, CDFG$	$A_1BCE, A_1BDF, A_1CDG,$ $A_1EFG, BCFG, BDEG, CDEF$
profil	$(1,4)_2 (1,3)_4 (0,4)$	$(1,3)_4 (0,4)_3$
effets confondus	$([j_2]; A_2C; BF), ([j_2j_3]; CD; FG), ([j_3]; A_2D; BG),$ $([j_1j_3]; A_2G; BD), ([j_1j_2j_3]; A_1A_2E; DF; CG),$ $([j_1j_2]; A_2F; BC), ([j_1]; CF; DG; A_2B), (A_1A_2C; EG),$ $(A_1A_2D; EF), (CE; A_1A_2G), (DE; A_1A_2F)$	$([j_3]; CG, A_1D, BF), ([j_1j_3]; EG, A_1F, BD),$ $([j_1]; CE, DF, A_1B), ([j_2j_3]; EF, A_1G, CD),$ $([j_2]; A_1C, DG, BE), ([j_1j_2]; FG, A_1E, BC),$ $([j_1j_2j_3]; CF, DE, BG)$
effets non confondus	$A_1, A_2, A_1A_2, B, C, D, E, F, G,$ $A_1B, A_1C, A_1D, A_1E, A_1F,$ $A_1G, A_2E, A_1A_2B, BE$	$A_1, A_2, A_1A_2, B, C, D, E, F, G,$ $A_2B, A_2C, A_2D, A_2E, A_2F, A_2G,$ $A_1A_2B, A_1A_2C, A_1A_2D,$ $A_1A_2E, A_1A_2F, A_1A_2G$
d.d.l résiduels	2	3

TAB. 3.57 – Les deux fractions régulières  $4 \times 2^6/8$  de résolution 4

Dans ces fractions, le facteur  $A$  a un niveau de trop. Pour ramener à trois son nombre de niveaux, on agrège deux de ses niveaux, par exemple les deux niveaux médians de la façon déjà décrite à gauche du tableau 3.54. Dans ces conditions, pour tout produit  $V = B^bC^cD^dE^eF^fG^g$ ,  $e(A_2V) = e(A_1V)$  et les effets factoriels  $e(V)$ ,  $e(A_1V)$ ,  $e(A_1A_2V)$  s'interprètent de façon similaire à celle indiquée après le tableau 3.55 pour le cas simple des deux facteurs  $A$  et  $B$ .

Les propriétés de la fraction après agrégation s'obtiennent en remplaçant, dans le tableau 3.57,  $A_2$  par  $A_1$  dans les effets factoriels  $e(A_2)$ ,  $e(A_2B)$ ,  $\dots$ ,  $e(A_2G)$  contenant  $A_2$  mais pas  $A_1$ . On peut ensuite exploiter d'une façon usuelle le modèle linéaire exprimant les produits scalaires  $\gamma(\hat{V}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{V} \rangle / 32$  en fonction des effets factoriels.

Pour illustrer, considérons d'abord la fraction de type 1 du tableau 3.57, sans les blocs. On estime  $\gamma(A_2C) = e(A_2C) + e(BF) = e(A_1C) + e(BF)$  par  $\hat{\gamma}(A_2C)$ ,  $\gamma(A_1C) = e(A_1C)$  par  $\hat{\gamma}(A_1C)$ , donc  $e(BF)$  par la différence  $\hat{\gamma}(A_2C) - \hat{\gamma}(A_1C)$ . La variance de cette différence est  $2\sigma^2/32 = \sigma^2/16$ .

Les effets  $BG$ ,  $BD$ ,  $BC$  sont de même estimables avec une variance  $\sigma^2/16$ .

Avec un découpage en 8 blocs défini par les trois pseudofacteurs  $j_1, j_2, j_3$ , la différence  $\hat{\gamma}(A_2C) - \hat{\gamma}(A_1C)$  estime la somme  $e(j_2) + e(BF)$ . Si cette différence est importante, il peut être difficile de déterminer si cela est dû à l'interaction  $BF$  ou à l'effet bloc  $e(j_2)$ . L'interprétation peut également s'avérer délicate pour chacune des 3 autres interactions  $BG$ ,  $BD$ ,  $BC$  également confondues avec un effet bloc.

Avec un découpage en 4 blocs, si on définit les blocs par les pseudofacteurs  $j_1j_2j_3 = A_2BCD$  et  $j_1 = A_2B$ , les 4 interactions  $BF$ ,  $BG$ ,  $BD$ ,  $BC$  restent estimables et on peut donc estimer, outre les interactions avec  $A_1$ , toutes les interactions avec  $B$ .

Pour la fraction de type 2 sans blocs, l'agrégation des niveaux de  $A$  ne rend pas estimables de nouvelles interactions, mais elle permet d'obtenir des estimations de sommes de deux interactions là où la fraction initiale n'estime que des sommes de trois interactions. Ceci facilite l'interprétation des résultats. Ainsi, la différence  $\hat{\gamma}(A_1D) - \hat{\gamma}(A_2D)$  estime après agrégation la somme  $e(CG) + e(BF)$ , alors que la fraction initiale ne permet d'estimer que la somme  $\gamma(A_1D) = e(CG) + e(A_1D) + e(BF)$ . La répartition en blocs ajoute des effets blocs aux sommes d'interactions confondues, ce qui peut rendre l'interprétation plus délicate quand les estimations associées sont importantes, mais ne fait pas perdre l'estimabilité de certaines interactions comme c'était le cas avec la répartition en 8 blocs dans la fraction de type 1.

Dans les exemples qui précèdent, on a utilisé pour analyser la fraction après agrégation les effets factoriels du plan initial. Ceux-ci donnent un poids double au niveau 1 de  $A$  résultant de l'agrégation. Si ce niveau est réellement privilégié dans l'application, il est normal de lui accorder un poids accru. Mais si il y a symétrie entre les niveaux de  $A$ , si donc le procédé d'agrégation n'est qu'un artifice technique de construction, il paraît plus naturel d'utiliser des effets factoriels accordant le même poids à chaque niveau.

Il est facile de définir de tels effets dans des cas particuliers. Par exemple dans la situation simple du plan contenant  $A$  et un unique facteur  $B$  à deux niveaux, le remplacement des coefficients 2 par des 1 devant les moyennes  $\mu(1, B)$ , dans  $e(\mathbf{1})$  et  $e(B)$  au tableau 3.55, produit de tels effets *equipondérés*. Une méthode générale de définition des effets factoriels, pouvant prendre en compte les poids, égaux ou inégaux, accordés a priori aux niveaux de chaque facteur, est donnée au paragraphe 3.10.3.

Malheureusement, le fait de rétablir des poids égaux pour définir les effets dans un plan obtenu par agrégation peut faire perdre une grande partie de la simplicité des confusions d'effets issue du plan régulier initial. Dans le cas de la fraction issue du plan de type 1 figurant à gauche du tableau 3.57, on verra au paragraphe 3.10.5 qu'une telle reparamétrisation fait perdre la résolution 4 et rend en conséquence l'interprétation des résultats difficile, voire impossible. Il faut noter toutefois que certains effets factoriels ne sont pas affectés par ce type de reparamétrisation. Ainsi dans l'exemple avec les deux

facteurs  $A$  et  $B$ , si l'interaction est supposée nulle, les effets  $e(B/A) = \mu(A,1) - \mu(A,-1)$  sont égaux et l'effet principal de  $B$  reste identique, à une constante multiplicative près, quand on change la pondération des niveaux de  $A$ . Ce résultat est généralisé au paragraphe 3.10.3.

## 3.10 Variances et efficacités factorielles

### 3.10.1 Efficacité factorielle pour un contraste

Dans les plans non orthogonaux tels que ceux considérés au § 3.13, ou dans les plans où il existe un facteur dont les niveaux ne sont pas équirépétés comme ceux du § 3.9, la donnée de la variance d'estimation d'un effet factoriel n'est pas très parlante. On lui associe une *efficacité factorielle* obtenue par comparaison à la variance d'estimation du même effet dans un *plan de référence* de bonne qualité comme le plan factoriel complet. Cependant comme ce dernier plan a généralement un nombre d'unités très différent, il convient avant comparaison de normaliser les variances pour pouvoir les comparer. Dans le cas où les observations sont répétées, on sait que la variance est inversement proportionnelle au nombre de répétitions. Il est donc légitime pour effectuer la normalisation de multiplier la variance par le nombre d'unités. On obtient ainsi ce qu'on appelle *la variance par unité*.

Considérons la fraction  $f_1$  d'un  $3^{12^2}$  à  $N = 8$  unités figurant à droite du tableau 3.54. Si  $e(A_1BC) = 0$ , la première égalité dans (3.73) montre que l'effet factoriel  $e(A_1) = e(A_2)$  est estimé par  $(\hat{\gamma}(A_1) + \hat{\gamma}(A_2))/2$  avec la variance  $\sigma^2/16$ , donc la variance par unité  $8\sigma^2/16 = \sigma^2/2$ . Le plan factoriel complet a dans ce cas  $N_0 = 12$  unités. L'effet  $e(A_1)$  y est estimé par  $(\bar{y}_{2..} - \bar{y}_{0..})/4$  où  $\bar{y}_{i..}$  est la moyenne des 4 observations au niveau  $i$  de  $A$ . La variance de cette dernière estimation est  $\sigma^2/32$  et sa variance par unité est  $12\sigma^2/32 = 3\sigma^2/8$ . L'efficacité d'estimation de  $e(A_1)$  dans la fraction à 8 unités s'obtient en divisant la variance par unité du plan factoriel complet par celle de la fraction :

$$\text{eff}(e(A_1)) = \frac{3\sigma^2/8}{\sigma^2/2} = \frac{3}{4}.$$

De façon similaire, si  $e(BC) = 0$ , la variance de l'estimateur de  $e(A_1A_2) = [\bar{\mu}(0,..) + \bar{\mu}(2,..) - 2\bar{\mu}(1,..)]/4$  est  $\sigma^2/8$ , donc la variance par unité  $8\sigma^2/8 = \sigma^2$  dans la fraction. Dans le plan factoriel complet, cet effet est estimé par  $(\bar{y}_{2..} + \bar{y}_{0..} - 2\bar{y}_{1..})/4$  avec une variance  $3\sigma^2/32$  et une variance par unité  $12 \times 3\sigma^2/32 = 9\sigma^2/8$ . L'efficacité associée est donc

$$\text{eff}(e(A_1A_2)) = \frac{9\sigma^2/8}{\sigma^2} = \frac{9}{8}.$$

Incidentement, ce résultat montre que l'efficacité ainsi définie peut être supérieure à 1. Cette valeur supérieure à 1 vient de ce que le plan à 8 unités du tableau 3.54 privilégie nettement le contraste  $e(A_1A_2)$  au détriment du contraste  $e(A_1)$ . A l'opposé, si on considère le plan  $2^3$  où  $A$  ne prend que les deux niveaux 0 et 2, plan qui sera noté  $f_3$  ultérieurement, la variance d'estimation de  $e(A_1)$  est  $\sigma^2/32$ , la variance par unité  $\sigma^2/4$ , ce qui donne, par comparaison à la variance par unité  $3\sigma^2/8$  du plan factoriel complet,

une efficacité de  $3/2$ . Dans ce cas le contraste  $e(A_1A_2)$  opposant le niveau 1 aux deux autres n'est pas estimable et l'efficacité associée est 0. L'obtention d'une forte efficacité —en fait l'efficacité maximale— pour  $e(A_1)$  entraîne donc une perte totale d'information sur  $e(A_1A_2)$ .

### 3.10.2 Efficacité factorielle globale pour un effet

Si l'on considère individuellement chaque contraste d'un effet factoriel donné, le plan factoriel complet n'est donc pas celui qui permet d'obtenir la variance d'estimation minimale. En revanche, si on mesure globalement cette variance avec un critère bien choisi, on montre en s'appuyant sur des résultats de Kiefer [1975] que le plan factoriel complet minimise la variance globale d'estimation pour chaque effet factoriel défini avec équipondération des niveaux [Mukerjee, 1982], [Kobilinsky, 1990].

Sans entrer dans le détail, précisons que ce critère doit être basé sur les valeurs propres de

$$\Omega = (NV)(N_0V_0)^{-1}, \quad (3.74)$$

où  $V$  et  $V_0$  sont les matrices de covariance, dans la fraction d'une part, dans le plan factoriel complet de l'autre, des estimations du vecteur  $\theta$  des paramètres générant l'effet factoriel. La multiplication par les nombres d'unités  $N$  et  $N_0$  correspondants transforme ces matrices en matrice de variance par unité et les rend ainsi comparables.

Parmi les critères globaux admissibles figurent la trace et le déterminant de  $\Omega$ , ou plutôt, si  $k$  désigne la dimension de  $\theta$ , les critères

$$\phi_T(\Omega) = \text{trace}(\Omega)/k, \quad \phi_D(\Omega) = |\Omega|^{1/k}$$

qui ont sur la trace et le déterminant l'avantage d'avoir même dimension qu'un rapport de variance.

D'après le résultat cité au début de ce paragraphe, si l'effet factoriel est défini avec équipondération des niveaux, ces critères atteignent leur maximum pour le plan factoriel complet, c'est-à-dire lorsque  $\Omega = \mathbf{I}$ . Les maximas correspondants sont alors  $\phi_T(\mathbf{I}) = 1$ ,  $\phi_D(\mathbf{I}) = 1$ . Il est donc naturel de définir les efficacités associées par

$$\text{eff}_T = \frac{\phi_T(\mathbf{I})}{\phi_T(\Omega)}, \quad \text{eff}_D = \frac{\phi_D(\mathbf{I})}{\phi_D(\Omega)} \quad (3.75)$$

Ces efficacités globales, majorées par 1 et égales à 1 pour le plan factoriel complet, caractérisent bien la façon dont le plan permet d'étudier l'effet factoriel en question. Cette caractérisation peut être utilement complétée par les valeurs propres de  $\Omega$  ou plutôt par leurs inverses qui s'interprètent comme des efficacités et sont appelées *efficacités principales*.

L'usage d'un plan de référence pour définir le critère utilisé permet de se rendre indépendant de la paramétrisation utilisée. Car si  $\theta$  est remplacé par  $U\theta$ , où  $U$  est une matrice  $k \times k$  inversible, les matrices  $V$  et  $V_0$  sont remplacées par  $UVU'$ ,  $UV_0U'$  et le

produit  $\Omega = (NV)(N_0V_0)^{-1}$  par  $U\Omega U^{-1}$  qui a les mêmes valeurs propres. Dans le cas particulier où  $U$  est tel que  $N_0UV_0U' = \sigma^2\mathbf{I}$ , c'est-à-dire si les nouveaux paramètres sont orthogonaux et normalisés pour le plan de référence,  $\Omega$  devient  $NUVU'/\sigma^2$ , c'est-à-dire, à  $\sigma^2$  près, la matrice de variance par unité des nouveaux paramètres. En ce sens, l'utilisation d'un plan de référence pour définir le critère revient à standardiser les paramètres. La non corrélation sur le plan de référence garantit que ces paramètres traduisent des phénomènes réellement différents.

Revenons à l'effet principal de  $A$  dans l'exemple 3.6. Cet effet est engendré par les contrastes  $\bar{\mu}(2, \dots) - \bar{\mu}(0, \dots)$  et  $\bar{\mu}(2, \dots) + \bar{\mu}(0, \dots) - 2\bar{\mu}(1, \dots)$ , et ceci indépendamment de la façon dont sont pondérés les niveaux de  $A$  puisque les moyennes se font sur les niveaux de  $B$  et  $C$ . Dans le plan factoriel complet à 12 unités, les estimateurs de ces contrastes sont  $\bar{y}_{2..} - \bar{y}_{0..}$  et  $\bar{y}_{2..} + \bar{y}_{0..} - 2\bar{y}_{1..}$ . Ils sont non corrélés et ont  $\sigma^2/2$  et  $3\sigma^2/2$  pour variances respectives, soit  $6\sigma^2$  et  $18\sigma^2$  comme variances par unité. Si on retient

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{\mu}(2, \dots) - \bar{\mu}(0, \dots)), \quad \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} (\bar{\mu}(2, \dots) + \bar{\mu}(0, \dots) - 2\bar{\mu}(1, \dots))$$

comme coordonnées du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  engendrant l'effet principal de  $A$ , on a  $N_0V_0 = \sigma^2\mathbf{I}$  et les efficacités se déduisent des valeurs propres de  $NV/\sigma^2$  où  $V$  est la matrice de covariance de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

Le tableau 3.60 donne ces efficacités, dans le cadre d'un modèle sans interaction, pour 5 fractions de taille 8 du  $3^12^2$ , les fractions  $f_1, f_2, f_3$  déjà considérées et deux autres  $f_4, f_5$  construites en faisant figurer, dans chacun des groupes de deux unités définis par les niveaux de  $B$  et  $C$ , une fois chaque paire (0,2), (1,2) de niveaux de  $A$  et 2 fois la paire (0,1). Pour faciliter la comparaison, ces 5 plans sont donnés explicitement au tableau 3.58. Les matrices de covariance  $NV/\sigma^2$  normalisées associées sont reportées au tableau 3.59. Comme  $k = 2$ , les efficacités principales sont ici les efficacités minimum et maximum pour un contraste  $\mathbf{a}'\boldsymbol{\theta}$  de l'effet principal de  $A$ :

$$\text{eff}_{\min}(A) = \min_a \frac{N_0\mathbf{a}'V_0\mathbf{a}}{N\mathbf{a}'V\mathbf{a}}, \quad \text{eff}_{\max}(A) = \max_a \frac{N_0\mathbf{a}'V_0\mathbf{a}}{N\mathbf{a}'V\mathbf{a}}. \quad (3.76)$$

Le tableau 3.60 donne aussi les efficacités pour les effets principaux  $B$  et  $C$ , qui coïncident avec les efficacités pour les contrastes  $e(B)$  et  $e(C)$ . Rappelons que dans le cadre du modèle sans interaction retenu, ces effets sont définis, de même que l'effet principal de  $A$ , indépendamment de la façon dont sont pondérés les niveaux de  $A$  (cf fin § 3.9).

L'examen des efficacités permet une comparaison détaillée des fractions dans le cadre du modèle additif retenu pour les calculs. La fraction  $f_3$ , optimale pour estimer  $e(A_1)$ , est clairement inadaptée dans ce contexte. Les fractions  $f_1, f_2$  estiment mieux les effets principaux que  $f_4$  si on retient les critères trace  $\text{eff}_T$  ou déterminant  $\text{eff}_D$  (ce sont en fait les fractions  $D$ -optimales que l'on peut obtenir par un algorithme comme ceux décrits dans la section 7.9 du livre ASU (1997) d'où est extrait ce texte. Cependant, certains contrastes de l'effet principal de  $A$  peuvent être plus mal estimés avec  $f_1$  qu'avec  $f_4$  puisque les efficacités minimales correspondantes sont 0.750 et 0.844 respectivement. La fraction  $f_5$  est mauvaise en raison de l'absence totale du niveau 2 de  $A$  dans les unités pour lesquelles  $C = 1$ .

$f_1$			$f_2$			$f_3$			$f_4$			$f_5$		
$A$	$B$	$C$												
2	1	1	2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	1	-1	1	1	-1	2	1	-1	2	1	-1	2	1	-1
1	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	1	-1	1	0	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	2	-1	1	2	-1	1	1	-1	1
2	-1	-1	2	-1	-1	0	-1	-1	0	-1	-1	1	-1	-1
0	-1	-1	1	-1	-1	2	-1	-1	1	-1	-1	2	-1	-1

TAB. 3.58 – 5 fractions de taille 8 d'un  $3^1 2^2$

$f_1, f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$\begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 8/9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2/3 & - \\ - & \infty \end{bmatrix}$	$\frac{1}{135} \begin{bmatrix} 156 & 12/\sqrt{3} \\ 12/\sqrt{3} & 148 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{99} \begin{bmatrix} 156 & 60/\sqrt{3} \\ 60/\sqrt{3} & 116 \end{bmatrix}$

TAB. 3.59 – Matrices de variance normalisées  $NV/\sigma^2$  du vecteur  $\hat{\theta}$  des effets de A

	$f_1, f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$\text{eff}_T(A)$	$9/10 = 0.900$	0	$135/152 \approx 0.888$	$99/136 \approx 0.728$
$\text{eff}_D(A)$	$\sqrt{27/32} \approx 0.918$	0	$\sqrt{405/512} \approx 0.889$	$\sqrt{297/512} \approx 0.762$
$\text{eff}_{\min}(A)$	$3/4 = 0.750$	0	$27/32 \approx 0.844$	$9/16 \approx 0.563$
$\text{eff}_{\max}(A)$	$9/8 = 1.125$	$3/2 = 1.5$	$15/16 \approx 0.937$	$33/32 \approx 1.031$
$\text{eff}(B)$	1	1	$10/11 \approx 0.909$	$11/12 \approx 0.917$
$\text{eff}(C)$	1	1	$10/11 \approx 0.909$	$2/3 \approx 0.667$

TAB. 3.60 – Efficacités factorielles pour fractions d'un  $3^1 2^2$ , modèle additif

Cette différence entre les précisions d'estimation dans le cadre du modèle additif est cependant mineure. Beaucoup plus importante en pratique est la différence qui apparaît entre ces fractions quand on s'intéresse aux interactions de deux facteurs. Il convient alors de distinguer entre les deux modes de définition des effets principaux de  $B$  et  $C$ . Ainsi dans un modèle incluant l'interaction  $A.B$ , il n'y a a priori pas identité entre l'effet de  $B$  défini en affectant des poids égaux aux niveaux de  $A$ ,

$$[\mu(0,1,\cdot) - \mu(0,-1,\cdot) + \mu(1,1,\cdot) - \mu(1,-1,\cdot) + \mu(2,1,\cdot) - \mu(2,-1,\cdot)]/6,$$

et celui qui est défini en affectant un poids double au niveau 1 de  $A$ ,

$$[\mu(0,1,\cdot) - \mu(0,-1,\cdot) + 2(\mu(1,1,\cdot) - \mu(1,-1,\cdot)) + \mu(2,1,\cdot) - \mu(2,-1,\cdot)]/8.$$

Considérons le cas où on affecte des poids égaux aux différents niveaux de  $A$ . On montre que les fractions  $f_4, f_5$  permettent d'estimer simultanément les effets principaux et interactions  $B.C, A.B$  avec des efficacités supérieures à 0.45 si l'interaction  $A.C$  est absente. La fraction  $f_2$  estime ces mêmes effets avec une efficacité minimale 0.375 un peu inférieure. Sous cette même hypothèse de nullité de  $A.C$ , la fraction  $f_1$ , qui inclut deux répétitions des traitements  $(1,1,-1)$  et  $(1,-1,1)$ , ne permet d'estimer que le contraste  $\{2 \text{ versus } 0\}$  de  $A$  et l'interaction avec  $B$  de ce contraste.

Si on affecte un poids double au niveau 1 de  $A$ , tout en gardant le même plan factoriel complet équiréparté comme référence, il n'y a pas de modification très sensible pour  $f_2, f_3, f_4, f_5$ . Mais l'effet  $B$  modifié devient estimable dans  $f_1$ , avec efficacité 1.125, sous l'hypothèse de nullité de  $A.C$ .

Les choses se compliquent si l'interaction  $AC$  est supposée également non nulle. La simplicité des confusions d'effets obtenue avec les fractions  $f_1$  et  $f_2$  lorsqu'on affecte un poids double au niveau 1 de  $A$  — cf (3.71) et tableau 3.56 — rend à nouveau ces fractions attrayantes par rapport aux fractions  $f_4$  et  $f_5$ . Dans tous les cas cependant, l'interprétation devient très délicate. La sagesse recommande donc, dans les cas où les interactions de deux facteurs ne sont pas a priori négligeables, soit de faire un effort supplémentaire d'expérimentation pour avoir le plan factoriel complet à 12 unités, soit si c'est impossible de sacrifier totalement un des niveaux de  $A$  pour se ramener au plan factoriel complet  $2^3$ .

La comparaison des fractions  $f_4$  et  $f_5$  permet de mettre clairement en évidence l'intérêt d'une étude d'efficacité séparée pour chaque effet factoriel. Il est facile de vérifier sur le tableau 3.58 que le remplacement de la colonne  $C$  par le produit des colonnes  $B$  et  $C$  et l'échange des groupes de lignes  $\{5,6\}$  et  $\{7,8\}$  transforme  $f_4$  en  $f_5$ . Considérons alors le modèle incluant les effets principaux et l'unique interaction  $BC$ , paramétré en fonction des effets factoriels équilibrés, ces effets étant normalisés pour avoir  $\sigma^2\mathbf{I}$  comme matrice de variance par unité dans le plan factoriel complet (cf § 3.10.3). Les matrices  $X$  des modèles linéaires associés à  $f_4$  et  $f_5$  (tableau 3.61) se déduisent alors l'une de l'autre par permutation des colonnes associées à  $C$  et  $BC$  et échange des groupes de lignes  $\{5,6\}$  et  $\{7,8\}$ . Les fractions obtenues sont donc identiques pour tout critère global fonction de  $X'X$  et invariant par permutation des colonnes de  $X$ . Cependant, les efficacités factorielles associées aux colonnes échangées sont  $\text{eff}(C) = 10/11, \text{eff}(BC) = 2/3$  dans  $f_4$ , donc  $\text{eff}(C) = 2/3, \text{eff}(BC) = 10/11$  dans  $f_5$ . Bien qu'identiques pour les critères globaux usuels

$f_4$						$f_5$					
A	$A_1$	$A_2$	B	C	BC	A	$A_1$	$A_2$	B	C	BC
0	$-\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1	1	0	$-\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1	1
1	0	$-2/\sqrt{2}$	1	1	1	1	0	$-2/\sqrt{2}$	1	1	1
0	$-\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	1	-1	-1	0	$-\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	1	-1	-1
2	$\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	1	-1	-1	2	$\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	1	-1	-1
1	0	$-2/\sqrt{2}$	-1	1	-1	0	$-\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	-1	1	-1
2	$\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	-1	1	-1	1	0	$-2/\sqrt{2}$	-1	1	-1
0	$-\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	-1	-1	1	1	0	$-2/\sqrt{2}$	-1	-1	1
1	0	$-2/\sqrt{2}$	-1	-1	1	2	$\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	-1	-1	1

TAB. 3.61 – Matrices  $X$  pour  $f_4, f_5$  avec l'interaction  $BC$

de mesure de la précision, ces fractions ne se valent donc pas. Sauf si l'effet principal  $C$  est a priori connu, la fraction  $f_4$  qui estime mieux l'effet principal  $C$  est préférable à la fraction  $f_5$  qui estime mieux l'interaction  $BC$ .

Les efficacités factorielles par effet sont donc un instrument d'analyse plus fin que les mesures d'efficacité globale pour l'ensemble des paramètres. Et ce qui précède suggère, lorsqu'on effectue une recherche algorithmique, de faire varier la pondération affectée à chaque effet dans le critère retenu pour essayer d'obtenir, non pas une solution, mais un ensemble de solutions acceptables dont on peut ensuite comparer les efficacités factorielles. Le changement de pondération peut être obtenu avec un critère comme la trace en multipliant les effets et divisant les colonnes correspondantes de  $X$  par des coefficients ad-hoc, avec un critère tel que le déterminant en utilisant des idées bayésiennes comme celles décrites dans Dumouchel et Jones [1994] qui conduisent à rajouter des constantes appropriées sur la diagonale de  $X'X$ .

### Efficacité avec un plan de référence comportant des répétitions

Dans le plan factoriel complet utilisé comme référence pour obtenir les efficacités factorielles, les niveaux de chaque facteur sont équirépétés. Si un des niveaux est jugé plus important que les autres, on peut souhaiter utiliser un plan standard de référence donnant plus de poids à ce niveau. Ainsi dans l'exemple 3.6, l'importance du niveau 1 du facteur  $A$  à trois niveaux peut justifier que l'on prenne comme référence un plan comportant 2 fois chaque traitement  $(1, B, C)$  et 1 fois chaque traitement  $(0, B, C)$  ou  $(2, B, C)$ . Le tableau 3.62 donne les efficacités ainsi obtenues pour les mêmes fractions  $f_1$  à  $f_5$  et également pour le plan factoriel complet (sans répétitions) noté  $f_0$ . Le modèle retenu comporte les interactions  $AB, BC$ , mais pas  $AC$ . La paramétrisation est celle qui donne un poids double au niveau 1 de  $A$ .

Les valeurs strictement supérieures à 1 de  $\text{eff}_T(A)$  et  $\text{eff}_D(A)$  pour le plan factoriel complet  $f_0$  montrent cependant que ce plan de référence avec des répétitions ne bénéficie pas des propriétés d'optimalité du plan factoriel complet.

	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4, f_5$
$\text{eff}_T(A)$	$16/15 \approx 1.067$	0	$2/3 \approx 0.667$	0	$8/13 \approx 0.615$
$\text{eff}_D(A)$	$\sqrt{32/27} \approx 1.088$	0	$1/\sqrt{2} \approx 0.707$	0	$\sqrt{0.4} \approx 0.650$
$\text{eff}_{\min}(A)$	$8/9 \approx 0.889$	0	0.5	0	0.5
$\text{eff}_{\max}(A)$	$4/3 \approx 1.333$	1	1	2	0.8
$\text{eff}(B)$	$8/9 \approx 0.889$	1	1	0	0.8
$\text{eff}(C)$	1	0	0.5	1	0.5
$\text{eff}(B.C)$	1	0	0.5	1	0.5
$\text{eff}_T(A.B)$	$16/15 \approx 1.067$	0	$2/3 \approx 0.667$	0	$8/13 \approx 0.615$
$\text{eff}_D(A.B)$	$\sqrt{32/27} \approx 1.088$	0	$1/\sqrt{2} \approx 0.707$	0	$\sqrt{0.4} \approx 0.650$
$\text{eff}_{\min}(A.B)$	$8/9 \approx 0.889$	0	0.5	0	0.5
$\text{eff}_{\max}(A.B)$	$4/3 \approx 1.333$	1	1	2	0.8

TAB. 3.62 – Efficacités factorielles de fractions d'un  $3^1 2^2$ , sans AC, cas pondéré

### 3.10.3 Paramétrisation orthogonale pour le plan de référence

On a vu que les calculs d'efficacité sont simplifiés quand

$$N_0 V_0 = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.77)$$

où  $V_0$  est la matrice de variance, dans le plan de référence, des estimations des paramètres appartenant à l'effet factoriel considéré. Dans nombre de cas, il existe une paramétrisation standard orthogonale pour le plan de référence qui satisfait alors automatiquement la condition (3.77) pour chacun des effets factoriels non nuls.

Nous ne considérons ici, comme dans Kobilinsky [1988], que le cas simple où il y a  $h$  facteurs qualitatifs  $A_1, \dots, A_h$  ayant  $T_1, \dots, T_h$  comme ensembles respectifs de niveaux et tels que les traitements  $(A_1, \dots, A_h)$  du produit cartésien  $T = T_1 \times \dots \times T_h$  sont tous réalisables. Pour prendre en compte les cas où on accorde un poids plus grand à certains niveaux, on introduit sur chaque  $T_j$  une mesure  $\pi_j$  précisant les poids accordés aux différents niveaux. Le plan de référence est alors le plan défini par la mesure produit  $\pi = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_h$  sur  $T$ . Cette mesure précise, à une constante de proportionnalité près, le nombre de répétitions de chaque traitement  $(A_1, \dots, A_h)$ . Par définition, celui-ci est donc

$$\lambda \pi(A_1, \dots, A_h) = \lambda \pi(A_1) \cdots \pi(A_h) \quad (3.78)$$

et la taille du plan de référence est  $N_0 = \lambda \pi(T) = \lambda \pi_1(T_1) \cdots \pi_h(T_h)$ . En multipliant à tour de rôle chaque  $\pi_j$  par un coefficient correctement choisi et divisant  $\lambda$  par ce même coefficient, on peut se ramener au cas où  $\pi_1, \dots, \pi_h$  et donc  $\pi$  sont des probabilités :

$$\pi_1(T_1) = 1, \dots, \pi_h(T_h) = 1 \quad \text{donc} \quad \pi(T) = 1 \quad .$$

Le nombre total d'unités du plan de référence est alors  $N_0 = \lambda$ .

Soit  $\mathbf{e}$  le vecteur  $p \times 1$  des paramètres, et pour tout traitement  $\mathbf{t} = (A_1, \dots, A_h)$  dans l'ensemble  $T$ ,

$$E(y/\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t})' \mathbf{e} \quad (3.79)$$

le modèle linéaire donnant l'espérance d'une observation sur une unité traitée par  $\mathbf{t}$ . A chaque traitement  $\mathbf{t}$  est donc attaché le vecteur  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  des  $p$  coefficients associés.

La matrice d'information associée au plan de référence est alors  $\lambda M_0$ , où

$$M_0 = \sum_{\mathbf{t} \in T} \pi(\mathbf{t}) \mathbf{x}(\mathbf{t}) \mathbf{x}(\mathbf{t})', \quad (3.80)$$

la matrice de variance  $\sigma^2 M_0^{-1} / \lambda$  et la matrice de variance par unité  $N_0 \sigma^2 M_0^{-1} / \lambda$ , soit  $\sigma^2 M_0^{-1}$  puisque  $N_0 = \lambda$ . Cette dernière ne dépend pas de  $\lambda$ . On peut donc, et c'est ce qui sera fait dans la suite de ce paragraphe, imposer à  $\pi_1, \dots, \pi_h$  d'être des probabilités et prendre  $\lambda = 1$ .

Soit alors, pour chaque  $j$ ,  $n_j = |T_j|$  le nombre de niveaux de  $A_j$  et  $\{\mathbf{x}_{j0}, \dots, \mathbf{x}_{jn_j}\}$  une base orthonormée de  $L^2(\pi_j)$  telle que

$$\mathbf{x}_{j0} = \mathbf{1}. \quad (3.81)$$

Si  $\mathbf{x}_{ja_j}$  est un vecteur de cette base, on note  $\mathbf{x}_{ja_j}(A_j)$  sa coordonnée pour le niveau  $A_j$  de  $T_j$ . Le produit tensoriel  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}$  est par définition le vecteur indicé par  $T$  qui a pour coordonnée d'indice  $\mathbf{t} = (A_1, \dots, A_h)$  le produit

$$\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_{1a_1}(A_1) \dots \mathbf{x}_{ha_h}(A_h). \quad (3.82)$$

Les produits tensoriels  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}$  associés aux différents  $h$ -uples  $(a_1, \dots, a_h)$  forment une base orthonormée de  $L^2(\pi)$ . Si on note  $\Pi$  et  $\Pi_j$  les produits scalaires de  $L^2(\pi)$  et  $L^2(\pi_j)$ , cette orthonormalité résulte de l'égalité suivante facile à montrer :

$$\Pi(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_h, \mathbf{z}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{z}_h) = \Pi_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_1) \dots \Pi_h(\mathbf{x}_h, \mathbf{z}_h) \quad (3.83)$$

Comme  $T$  et  $T_j$  sont ici finis,  $L^2(\pi)$  et  $L^2(\pi_j)$  coïncident avec les espaces  $\mathbb{R}^T$  et  $\mathbb{R}^{T_j}$  munis des produits scalaires  $\Pi$  et  $\Pi_j$  définis par

$$\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{t} \in T} \pi(\mathbf{t}) \mathbf{x}(\mathbf{t}) \mathbf{z}(\mathbf{t}), \quad \Pi_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_j) = \sum_{A_j \in T_j} \pi_j(A_j) \mathbf{x}_j(A_j) \mathbf{z}_j(A_j). \quad (3.84)$$

Ces produits scalaires peuvent se mettre sous la forme

$$\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \langle \Pi \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \Pi \mathbf{z} \rangle \quad \Pi_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_j) = \langle \Pi_j \mathbf{x}_j, \mathbf{z}_j \rangle = \langle \mathbf{x}_j, \Pi_j \mathbf{z}_j \rangle \quad (3.85)$$

si on note aussi  $\Pi$  et  $\Pi_j$  les matrices diagonales avec les poids  $\pi(\mathbf{t})$  et  $\pi(A_j)$  respectivement sur la diagonale, et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel.

Si  $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur des réponses théoriques,

$$E(y/\mathbf{t}) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{t}), \quad (3.86)$$

la décomposition de  $\boldsymbol{\tau}$  sur la base orthonormée des  $\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_h$  s'écrit

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{a_1, \dots, a_h} \mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h} e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h}) \quad (3.87)$$

où

$$e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h}) = \Pi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}). \quad (3.88)$$

Ce dernier produit scalaire est égal par définition à

$$e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h}) = \sum_{\mathbf{t}} \pi(\mathbf{t}) \mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}(\mathbf{t}) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{t}) \quad (3.89)$$

et peut aussi s'écrire

$$e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h}) = \sum_{A_1, \dots, A_h} \pi_1(A_1) \dots \pi_h(A_h) \mathbf{x}_{1a_1}(A_1) \dots \mathbf{x}_{ha_h}(A_h) \boldsymbol{\tau}(A_1, \dots, A_h) \quad (3.90)$$

soit encore

$$e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h}) = \langle \boldsymbol{\tau}, \Pi_1 \mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \Pi_h \mathbf{x}_{ha_h} \rangle. \quad (3.91)$$

On peut interpréter l'effet factoriel  $e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h})$  comme la moyenne générale si  $a_1 = \dots = a_h = 0$ , un contraste de l'effet principal de  $A_j$  si  $a_j \neq 0$  et  $a_l = 0$  pour  $l \neq j$ , enfin une interaction entre les facteurs  $A_j$  pour lesquels  $a_j \neq 0$  si il y a plusieurs tels  $a_j$ .

Les conventions et notations suivantes sont utilisées dans ce qui suit pour caractériser les espaces de contrastes associés aux interactions et effets principaux. Rappelons que ces espaces sont aussi appelés des effets factoriels de même que leurs éléments.

A l'interaction  $\prod_{j \in J} A_j$ , on associe le sous-ensemble  $J \subset \{1, \dots, h\}$  des indices des facteurs interagissant, à l'effet principal  $A_j$  le sous-ensemble  $J = \{j\}$  et à la moyenne générale l'ensemble vide  $J = \emptyset$ . Dans la suite, on identifie souvent un effet et le sous-ensemble associé et on parle alors de l'effet factoriel  $J$ .

Soit  $\mathcal{A}_J$  l'ensemble des  $h$ -uplets  $(a_1, \dots, a_h)$  tels que  $a_j \neq 0$  si et seulement si  $j \in J$ . L'espace des formes linéaires de  $\boldsymbol{\tau}$  associé à  $J$  est donc l'espace engendré par les effets  $e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h})$  tels que  $(a_1, \dots, a_h) \in \mathcal{A}_J$ . Si on note  $E_J$  l'espace engendré par les vecteurs  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}$  tels que  $(a_1, \dots, a_h) \in \mathcal{A}_J$ , c'est aussi l'espace des formes  $\Pi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{c})$  telles que  $\mathbf{c} \in E_J$ .

## Le modèle

En analyse de variance, le modèle spécifie les interactions et effets principaux supposés non nuls. On note ici  $\mathcal{M}$  l'ensemble des  $J \subset \{1, \dots, h\}$  associés et  $\mathcal{A}$  l'ensemble correspondant de  $h$ -uplets  $(a_1, \dots, a_h)$ :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{J \in \mathcal{M}} \mathcal{A}_J. \quad (3.92)$$

La nullité des effets  $J$  pour  $J \notin \mathcal{M}$  se traduit par le fait que  $\boldsymbol{\tau}$  appartient au sous-espace  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{R}^T$  engendré par les vecteurs  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}$  tels que  $(a_1, \dots, a_h) \in \mathcal{A}$ :

$$\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E} = \{ \mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}, (a_1, \dots, a_h) \in \mathcal{A} \}. \quad (3.93)$$

Ce modèle peut être décrit par (3.87), à condition de restreindre la sommation aux  $h$ -uplets  $(a_1, \dots, a_h)$  dans  $\mathcal{A}$ , et de supposer que les effets  $e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h})$  non nuls varient de façon totalement libre.

## Sous-espaces invariants par reparamétrisation.

Dans l'approche retenue ici, les définitions données font dépendre les effets, donc le modèle, du choix des mesures  $\pi_j$  et des bases  $\{\mathbf{x}_{j0}, \dots, \mathbf{x}_{jn_j}\}$ . Les exemples du § 3.9 ont cependant montré que cette dépendance est loin d'être systématique. On a en fait les résultats généraux suivants.

1. Si les mesures  $\pi_j$  sont déterminées, l'espace de contraste associé à l'effet  $J$  est indépendant du choix des bases  $\pi_j$ -orthogonales  $\{\mathbf{x}_{j0}, \dots, \mathbf{x}_{jn_j}\}$  sélectionnées.
2. Sous l'hypothèse, usuelle en analyse de variance, que lorsqu'une interaction est non nulle, les effets principaux et interactions qu'elle contient sont également non nuls, c'est-à-dire si

$$J \in \mathcal{M}, \quad K \subset J \implies K \in \mathcal{M}, \quad (3.94)$$

le modèle (i.e. l'espace  $\mathcal{E}$ ) est indépendant du choix des mesures  $\pi_j$ .

3. Soit  $\bar{J}$  l'ensemble des indices  $j$  n'appartenant pas à  $J$ , mais appartenant à un ensemble  $K$  de  $\mathcal{M}$  qui contient  $J$ :

$$\bar{J} = \left( \bigcup_{K / K \in \mathcal{M}, J \subset K} K \right) \setminus J. \quad (3.95)$$

Sous l'hypothèse (3.94), toute modification des mesures qui ne touche pas aux  $\pi_j$  pour  $j \in \bar{J}$  laisse invariant l'espace des contrastes de l'effet  $J$ . En particulier, cet espace est indépendant des mesures  $\pi_j$  pour  $j \in J$ . Il est indépendant de toutes les mesures si  $J$  est maximal dans  $\mathcal{M}$ , donc  $\bar{J} = \emptyset$ .

Les démonstrations qui suivent peuvent être sautées sans nuire à la compréhension du reste du texte.

### ★ 1) Indépendance des effets vis à vis des bases

Soit  $E_{j0}$  le sous-espace de  $L^2(\pi_j)$  engendré par  $\mathbf{x}_{j0} = \mathbf{1}$  et  $E_{j1}$  le sous-espace engendré par les vecteurs  $\mathbf{x}_{j1}, \dots, \mathbf{x}_{jn_j}$ . Le sous-espace  $E_{j1}$  est aussi le  $\Pi_j$ -orthogonal de  $E_{j0}$  et ne dépend donc pas du choix des vecteurs  $\mathbf{x}_{j1}, \dots, \mathbf{x}_{jn_j}$ .

Soit  $(\delta_1, \dots, \delta_h)$  le  $h$ -uplet indicateur de l'ensemble  $J$ , défini par  $\delta_j = 1$  si  $j \in J$ ,  $\delta_j = 0$  sinon. Il est facile de vérifier, en utilisant la multilinéarité du produit tensoriel, que  $E_J$  est l'espace  $E_{1\delta_1} \otimes \dots \otimes E_{h\delta_h}$  engendré par les produits  $\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_h$  tels que  $\mathbf{x}_j \in E_{j\delta_j}$  pour  $j = 1, \dots, h$ . Pour des  $\pi_j$  donnés, il ne dépend donc pas des bases  $\Pi_j$ -orthogonales sélectionnées dans chaque  $L^2(\pi_j)$  et l'espace des contrastes  $\Pi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{c}) = \langle \boldsymbol{\tau}, \Pi \mathbf{c} \rangle$  pour  $\mathbf{c} \in E_J$ , qui s'identifie à  $\Pi(E_J)$ , image de  $E_J$  par l'application de matrice  $\Pi$ , n'en dépend pas non plus.

### 2) Indépendance du modèle par rapport aux mesures

Si  $J$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, h\}$ , on note  $P_J$  la projection canonique de  $T$  sur  $T_J = \prod_{j \in J} T_j$ , et  $\mathcal{E}_J$  le sous-espace des fonctions de la forme  $\phi \circ P_J$  où  $\phi \in \mathbb{R}^{T_J}$ . Ces dernières sont les vecteurs de  $\mathbb{R}^T$  dont les coordonnées ne dépendent que des niveaux  $A_j$  d'indice  $j \in J$ . L'association de l'espace  $\mathcal{E}_J$  à la fonction  $P_J$ , qui peut être considérée comme un facteur sur le plan  $T$  de référence, est classique en analyse de variance [Tjur, 1984], [Kobilinsky, 1985b]. L'espace  $\mathcal{E}_J$  est engendré par les indicatrices des niveaux de  $P_J$  et sa dimension est donc le nombre de niveaux de  $P_J$ , c'est-à-dire  $n_J = \prod_{j \in J} n_j$ .

Soit alors  $\mathcal{X}_J$  le sous-espace engendré par les  $n_J$  vecteurs  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}$  tels que  $a_j = 0$  pour  $j \notin J$ . Comme  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}(A_1, \dots, A_h) = \prod_{j \in J} \mathbf{x}_{ja_j}(A_j)$  ne dépend que des niveaux  $A_j$  d'indice  $j \in J$ , on a  $\mathcal{X}_J \subset \mathcal{E}_J$  et donc

$$\mathcal{X}_J = \mathcal{E}_J \quad (3.96)$$

puisque ces deux espaces ont la même dimension  $n_J$ . Par suite, le sous-espace  $\mathcal{X}_J$  ne dépend pas des mesures et bases retenues.

Il est alors facile de vérifier, compte tenu de (3.94), que le sous-espace des vecteurs  $\boldsymbol{\tau}$  engendré par les produits  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}$  pour lesquels  $(a_1, \dots, a_h) \in \mathcal{A}$  est identique au sous-espace engendré par les  $\mathcal{E}_J$  associés aux effets  $J$  non nuls. Ceci montre que cet espace est aussi indépendant des mesures et bases retenues.

### 3) Indépendance de certains effets par rapport aux mesures

Il est facile de montrer, à partir de (3.91), que les contrastes de l'effet  $J$  sont engendrés par les formes linéaires  $\boldsymbol{\tau} \mapsto \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{d}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_h \rangle$ , où  $\mathbf{d}_j = \Pi_j \mathbf{1}$  si  $j \notin J$  et  $\mathbf{d}_j$  appartient à  $\Pi_j(E_{j1})$ , qui est l'orthogonal de  $\mathbf{1}$  pour le produit scalaire usuel, si  $j \in J$ . Ce dernier espace ne dépend pas de  $\pi_j$  et l'ensemble de ces générateurs ne dépend donc pas des  $\pi_j$  pour  $j \in J$ .

Il reste à montrer que, si  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}$ ,  $\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{d}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_h \rangle$  est également indépendant de  $\pi_j$  pour les autres indices  $j \notin \bar{J}$ . Comme  $\mathcal{E}$  est somme des  $\mathcal{E}_K$ ,  $K \in \mathcal{M}$ , on peut se ramener à l'étude des cas où  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{E}_K$ .

L'espace  $\mathcal{E}_K = \mathcal{X}_K$  est engendré par les produits  $\mathbf{x}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_h$  tels que  $\mathbf{x}_j = \mathbf{1}$  pour  $j \notin K$ . Le produit scalaire d'un tel vecteur avec  $\mathbf{d}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_h$  peut être calculé par une formule analogue à (3.83) :

$$\langle \mathbf{x}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_h, \mathbf{d}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_h \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{d}_1 \rangle \cdots \langle \mathbf{x}_h, \mathbf{d}_h \rangle . \quad (3.97)$$

Si  $J$  n'est pas inclu dans  $K$ , il existe un indice  $j \in J$  n'appartenant pas à  $K$ . On a alors  $\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{d}_j \rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{d}_j \rangle = 0$  et le produit scalaire à gauche de (3.97) est nul, donc indépendant du choix des mesures.

Si  $J \subset K \in \mathcal{M}$  et  $j \notin K$ , on a

$$\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{d}_j \rangle = \langle \mathbf{1}, \Pi_j \mathbf{1} \rangle = \sum \pi_j(A_j) = 1$$

et le produit scalaire à gauche de (3.97) ne dépend pas de  $\pi_j$ . Il ne dépend pas a fortiori des indices  $j$  n'appartenant pas à  $\bar{J}$ ,

Quel que soit l'ensemble  $K \in \mathcal{M}$  et le générateur  $\mathbf{x}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_h$  de  $\mathcal{E}_K$  considéré, le produit scalaire à gauche de (3.97) est donc indépendant des mesures  $\pi_j$  d'indice  $j \notin \bar{J}$  et il en est donc de même de  $\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{d}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{d}_h \rangle$ .

Le modèle défini par (3.86) et (3.87), où la sommation est sur les  $(a_1, \dots, a_h) \in \mathcal{A}$ , peut être réécrit sous la forme (3.79) en notant  $\mathbf{e}$  le vecteur des effets factoriels non nuls et  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  le vecteur ayant  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}(\mathbf{t})$  comme coordonnée d'indice  $(a_1, \dots, a_h)$ .

Dans la matrice d'information  $M_0$  donnée par (3.80), la coordonnée ayant pour indices  $(a_1, \dots, a_h)$  et  $(b_1, \dots, b_h)$  est alors

$$\sum_{\mathbf{t}} \pi(\mathbf{t}) \mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}(\mathbf{t}) \mathbf{x}_{1b_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{hb_h}(\mathbf{t}) = \Pi(\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}, \mathbf{x}_{1b_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{hb_h}) .$$

Elle est égale à 1 si  $(a_1, \dots, a_h) = (b_1, \dots, b_h)$ , 0 sinon. L'orthonormalité dans  $L^2(\pi)$  des vecteurs  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}$  apparaissant dans le modèle linéaire (3.87) entraîne donc que  $M_0$  est l'identité :

$$M_0 = \mathbf{I} \quad (3.98)$$

et les paramètres (3.88) ont bien les propriétés annoncées au début de ce paragraphe.

Pour illustrer, reprenons l'exemple 3.6 en notant  $A_1, A_2, A_3$  au lieu de  $A, B, C$  les trois facteurs. On a  $T_1 = \{0,1,2\}$ ,  $T_2 = T_3 = \{1, -1\}$ . Le plan factoriel qui sert de référence pour le calcul des efficacités du tableau 3.60 est défini, à la constante  $\lambda = 12$  près, par le produit  $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3$  des probabilités uniformes sur  $T_1, T_2, T_3$  qui satisfont

$$\pi_1(0) = \pi_1(1) = \pi_1(2) = 1/3 \quad (3.99)$$

$$\pi_2(-1) = \pi_2(1) = 1/2, \quad \pi_3(-1) = \pi_3(1) = 1/2. \quad (3.100)$$

On note  $\mathcal{P}$  ce plan equirepété.

Si on donne un poids double au niveau 1 de  $A_1$ , c'est-à-dire si on remplace (3.99) par

$$\pi_1(0) = \pi_1(2) = 1/4, \quad \pi_1(1) = 1/2 \quad (3.101)$$

on obtient, à la constante 16 près, le plan de référence utilisé pour calculer les efficacités du tableau 3.62, qui est noté  $\mathcal{Q}$ . Pour  $j = 2,3$ , la seule base orthonormée de  $L^2(\pi_j)$  possible, à la multiplication par  $-1$  près, est  $\mathbf{x}_{j0} = (1,1)'$ ,  $\mathbf{x}_{j1} = (1, -1)'$ . Pour  $j = 1$ , le tableau 3.63 donne un système orthonormé pour chacun des deux plans. Il est facile de

niveau	Plan $\mathcal{P}$				Plan $\mathcal{Q}$			
	$\pi_1$	$\mathbf{x}_{10}$	$\mathbf{x}_{11}$	$\mathbf{x}_{12}$	$\pi_1$	$\mathbf{x}_{10}$	$\mathbf{x}_{11}$	$\mathbf{x}_{12}$
0	1/3	1	$-\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	1/4	1	$-\sqrt{2}$	1
1	1/3	1	0	$-2/\sqrt{2}$	1/2	1	0	-1
2	1/3	1	$\sqrt{3/2}$	$1/\sqrt{2}$	1/4	1	$\sqrt{2}$	1

TAB. 3.63 – Bases orthonormées de  $\mathbb{R}^{T_1}$  pour deux plans de référence

vérifier l'orthonormalité. Par exemple pour le plan  $\mathcal{Q}$ , on a

$$\langle \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{12} \rangle = (1 \times 1)/4 + (1 \times (-1))/2 + (1 \times 1)/4 = 0,$$

$$\langle \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{12} \rangle = (1 \times 1)/4 + ((-1) \times (-1))/2 + (1 \times 1)/4 = 1,$$

De façon plus générale, dénotons par  $1, 2, \dots, n_j$  les niveaux du facteur  $A_j$  et par  $p_1 = \pi_j(1), p_2 = \pi_j(2), \dots, p_{n_j} = \pi_j(n_j)$  les poids associés. Le tableau 3.64 donne une base orthogonale de  $L^2(\pi_j)$  de laquelle on déduit en normalisant une base orthonormée. Lorsque les poids  $p_j$  sont égaux, cette base est connue sous le nom de base de Helmert [Chambers and Hastie, 1993].

### Remarques.

1. Cette méthode de paramétrisation est définie dans le cas où tous les traitements  $(A_1, \dots, A_h)$  sont réalisables, autrement dit si les facteurs sont complètement *croisés*.

$\pi_j$	$\mathbf{x}_{j0}$	$\mathbf{x}_{j1}$	$\mathbf{x}_{j2}$	$\mathbf{x}_{j3}$	
$p_1$	1	$\frac{1}{p_1}$	$\frac{1}{p_1+p_2}$	$\frac{1}{p_1+p_2+p_3}$	
$p_2$	1	$-\frac{1}{p_2}$	$\frac{1}{p_1+p_2}$	$\frac{1}{p_1+p_2+p_3}$	$\vdots$
$p_3$	1	0	$-\frac{1}{p_3}$	$\frac{1}{p_1+p_2+p_3}$	
$p_4$	1	0	0	$-\frac{1}{p_4}$	
			$\dots$		

TAB. 3.64 – Une base orthogonale de  $L^2(\pi_j)$  dans le cas pondéré

Toutefois dans les cas où il y a des hiérarchies entre facteurs, on peut souvent utiliser cette même méthode en se ramenant au cas croisé par introduction de pseudofacteurs.

Si par exemple  $A'_2$  est un facteur à 6 niveaux hiérarchisé par le facteur  $A_1$  à 3 niveaux, et si pour chaque niveau du facteur hiérarchisant  $A_1$ ,  $A'_2$  prend le même nombre de niveaux, à savoir  $2 = 6/3$ , on peut introduire un *pseudofacteur*  $A_2$  donnant le numéro 1 ou 2 du niveau de  $A'_2$  pour un niveau fixé de  $A_1$ . Les niveaux de  $A'_2$  sont alors repérés par les 6 couples  $(A_1, A_2)$  de niveaux du facteur produit  $A_1 \times A_2$ .

2. Dans le cas où il y a des hiérarchies non uniformes, c'est-à-dire telles que le nombre de niveaux du facteur hiérarchisé par niveau du facteur hiérarchisant n'est pas constant, on peut aussi sous certaines conditions obtenir une paramétrisation orthogonale pour un plan de référence ad hoc [Kobilinsky, 1996]. La procédure permettant d'obtenir cette reparamétrisation, plus compliquée que dans le cas uniforme, n'est pas abordée ici.

### 3. Paramétrisation complexe.

La même démarche s'applique si les vecteurs  $\{\mathbf{x}_{j0}, \dots, \mathbf{x}_{jn_j}\}$  de chaque base sont dans le corps  $\mathbb{C}$  des complexes [Kobilinsky, 1990]. Le produit scalaire est alors le produit hermitien défini sur  $\mathbb{C}^{T_j}$  par

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \sum_{A_j \in T_j} \pi(A_j) \mathbf{x}(A_j) \bar{\mathbf{z}}(A_j).$$

Notons  $0, 1, \dots, n_j - 1$  les niveaux de  $T_j$ . Si  $\pi_j$  est la mesure uniforme sur  $T_j$ , c'est-à-dire si  $\pi_j(A_j) = 1/n_j$  pour tout niveau  $A_j \in T_j$ , une base orthonormée naturelle est le système  $\mathbf{x}_{j0}, \dots, \mathbf{x}_{jn_j}$  défini par :

$$\mathbf{x}_{ja_j}(A_j) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n_j} a_j A_j\right).$$

En effet si  $\rho = \exp(2\pi i(a_j - b_j)/n_j)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{ja_j}, \mathbf{x}_{jb_j} \rangle &= \frac{1}{n_j} \sum_{A_j=0}^{n_j-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{n_j}(a_j - b_j)A_j\right) = \sum_{A_j=0}^{n_j-1} \rho^{A_j} / n_j \\ &= \frac{1}{n_j} \frac{1 - \rho^{n_j}}{1 - \rho} = 0 \quad \text{si } a_j \neq b_j, \text{ donc } \rho \neq 1, \\ &= 1 \quad \text{si } a_j = b_j, \text{ donc } \rho = 1. \end{aligned}$$

Les vecteurs de cette base sont appelés les *caractères (irréductibles)* du groupe cyclique  $T_j$  d'ordre  $n_j$ . Dans le tableau 3.65 on a reporté en colonne ces bases pour  $n_j = 2, 3, 4$ . Dans ce tableau,  $j$  et  $i$  sont les nombres complexes usuels:  $j = \exp(2\pi i/3)$ ,  $i = \exp(2\pi i/4)$ .

	$a_j$	0	1		$a_j$	0	1	2		$a_j$	0	1	2	3
$A_j$				$A_j$					$A_j$					
	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	1	1	-1	1	1	$j$	$j^2$	$j^2$	1	1	$i$	-1	-1	- $i$
				2	1	$j^2$	$j$	$j$	2	1	-1	1	-1	-1
									3	1	- $i$	-1	$i$	$i$

TAB. 3.65 – Base des caractères des groupes cycliques d'ordre 2, 3, 4

Les produits tensoriels  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}$  sont appelés les *caractères (irréductibles)* du groupe produit  $T_1 \times \dots \times T_h$ . La paramétrisation associée est particulièrement adaptée à l'étude des fractions régulières ou des plans construits à partir de ces fractions. C'est celle qui est utilisée au paragraphe 3.4.2 pour exprimer de façon simple les confusions d'effets dans une fraction d'un  $3^h$ . On a vu qu'elle avait un autre atout appréciable. Les coordonnées des caractères  $\mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}$  sont des nombres complexes de module 1. La matrice d'information par unité de n'importe quel plan a alors l'identité sur sa diagonale. C'est cette propriété qui permet de prouver facilement que les efficacités définies par (3.75), avec le plan factoriel complet comme référence, sont majorées par 1. Cette propriété a été utilisée pour prouver l'optimalité de certains dispositifs non orthogonaux [Monod et Kobilinsky, 1994], [Collombier, 1989].

### 3.10.4 Techniques matricielles de calcul

L'expression de la réponse théorique du traitement  $\mathbf{t}$  déduite de (3.87) est

$$E(y/\mathbf{t}) = \sum_{a_1, \dots, a_h} \mathbf{x}_{1a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{ha_h}(\mathbf{t}) e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h}). \quad (3.102)$$

Si on l'écrit pour chaque traitement de la fraction considérée, on obtient le modèle linéaire

$$E(\mathbf{y}) = X\mathbf{e}$$

où  $\mathbf{e}$  est le vecteur ayant les effets factoriels non nuls pour coordonnées et  $X$  la matrice qui a la coordonnée (3.82) sur la ligne d'indice  $\mathbf{t}$  et la colonne d'indice  $(a_1, \dots, a_h)$ . La matrice d'information par unité associée est

$$M = X'X/N .$$

Si  $M$  est inversible, la matrice de covariance par unité est  $\sigma^2 M^{-1}$ . On en déduit la matrice de covariance par unité et les efficacités pour n'importe quel effet factoriel en prenant la sous-matrice de  $M^{-1}$  associée aux paramètres correspondants. L'égalité (3.77) est ici satisfaite puisque la matrice d'information  $M_0$  pour  $\mathbf{e}$  dans le plan de référence est l'identité d'après (3.98). La sous matrice de  $M_0^{-1} = \mathbf{I}$  associée à un effet est a fortiori l'identité.

Si  $M$  n'est pas inversible, on procède un peu différemment. Quitte à modifier l'ordre des paramètres, on peut réécrire  $\mathbf{e}$  sous la forme  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$  où  $\mathbf{e}_1$  est le vecteur des paramètres associés à l'effet factoriel étudié. La matrice  $X$  peut être réécrite sous la forme partitionnée  $(X_0, X_1)$  correspondante si bien que le modèle prend la forme (3.35). La matrice d'information par unité pour  $\mathbf{e}_1$  est alors  $X_1'Q_0X_1/N$  où  $Q_0 = \mathbf{I} - X_0(X_0'X_0)^{-1}X_0'$ .

Soient  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$  les valeurs propres de cette matrice. Si  $\lambda_k = 0$ ,  $\mathbf{e}_1$  n'est pas estimable et l'efficacité d'estimation globale de  $\mathbf{e}_1$  est 0. Si  $\lambda_k > 0$ , la matrice de variance de  $\hat{\mathbf{e}}_1$  est  $V = \sigma^2(X_1'Q_0X_1)^{-1}$ . Comme (3.77) est vérifié,  $(NV)(N_0V_0)^{-1} = N(X_1'Q_0X_1)^{-1}$ . Les valeurs propres de cette matrice sont  $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_k$ . Les efficacités principales sont donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  et les efficacités globales pour l'effet factoriel associé à  $\mathbf{e}_1$  sont

$$\text{eff}_T(\mathbf{e}_1) = \frac{k}{\frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_k}}, \quad \text{eff}_D(\mathbf{e}_1) = (\lambda_1 \dots \lambda_k)^{1/k} .$$

### 3.10.5 Recherche matricielle des confusions d'effets

Considérons une reparamétrisation de plein rang telle que celles décrites aux § 3.5.2 et § 3.10.3 et soit

$$E(\mathbf{y}) = X\boldsymbol{\beta} , \tag{3.103}$$

où  $X$  est une matrice  $N \times p$ , l'expression du modèle linéaire avec cette reparamétrisation dans le plan considéré.

Pour examiner les confusions entre les paramètres de  $\boldsymbol{\beta}$  dans ce plan, une procédure générale simple est la suivante. On balaye les colonnes de  $X$  dans un ordre déterminé et on les répartit en deux paquets, selon qu'elles sont ou pas dans le sous-espace de  $\mathbb{R}^T$  engendré par les colonnes précédentes (en pratique, il est possible d'effectuer cette opération en triangularisant  $X'X$ ). Soient  $X_2$  et  $X_1$  les sous-matrices formées par les deux paquets de colonnes ainsi formées. Par construction, chaque colonne de  $X_1$  est indépendante des colonnes précédentes et  $X_1$  est donc de plein rang.

Si on note  $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)'$  la partition de  $\boldsymbol{\beta}$  associée à la partition  $X = (X_1, X_2)$  ainsi trouvée, l'estimation des moindres carrés  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathbf{y}$  dans le modèle réduit  $E(\mathbf{y}) = X_1\boldsymbol{\beta}_1$  a pour espérance dans le modèle complet (3.103)

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}_1 + (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2\boldsymbol{\beta}_2 . \tag{3.104}$$

Les coordonnées de cette espérance sont des fonctions estimables des paramètres et elles engendrent l'ensemble des fonctions estimables.

Toute fonction estimable est en effet de la forme  $\mathbf{a}'X'X\boldsymbol{\beta}$ . Mais comme par construction  $X_1$  et  $X$  engendrent le même espace, il existe un vecteur  $\mathbf{b}$  tel que  $X\mathbf{a} = X_1\mathbf{b}$  et

$$\mathbf{a}'X'X\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}'X'_1(X_1\boldsymbol{\beta}_1 + X_2\boldsymbol{\beta}_2) = \mathbf{c}'(\boldsymbol{\beta}_1 + (X'_1X_1)^{-1}X'_1X_2\boldsymbol{\beta}_2)$$

en posant

$$\mathbf{c} = X'_1X_1\mathbf{b} .$$

La matrice  $A = (X'_1X_1)^{-1}X'_1X_2$  donnant les coefficients de  $\boldsymbol{\beta}_2$  est généralement appelée *matrice d'alias* de  $\boldsymbol{\beta}_1$ . En règle générale, ses coefficients sont non nuls et tous les paramètres de  $\boldsymbol{\beta}_2$  apparaissent dans chacune des lignes de (3.104). Par ailleurs, les générateurs des fonctions estimables ainsi trouvés dépendent de l'ordre dans lequel on balaye les colonnes de  $X$ . Mais pour les plans construits à partir de plans réguliers, la simplicité des confusions se traduit, lorsqu'on utilise une reparamétrisation appropriée, par un grand nombre de 0 dans  $A$  et les fonctions estimables trouvées sont, dans une certaine mesure, indépendante de l'ordre de balayage des colonnes de  $X$ . En particulier, les paramètres estimables figurent dans  $\boldsymbol{\beta}_1$  et la ligne associée de  $A$  est nulle.

★ Un paramètre de  $\boldsymbol{\beta}$  est estimable si et seulement si la colonne associée de  $X$  n'est pas dans l'espace engendré par les autres colonnes. Donc seul les paramètres associés aux colonnes de  $X_1$  sont éventuellement estimables.

Par ailleurs, on a  $X_1A = X_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1X_2 = X_2$  puisque les colonnes de  $X_2$  sont combinaisons linéaires de celles de  $X_1$  et que  $X_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1$  est le projecteur sur l'image de  $X_1$ . Si on note  $\mathbf{x}_{1i}$  la colonne  $i$  de  $X_1$ ,  $\mathbf{x}_{2j}$  la colonne  $j$  de  $X_2$  et  $a_{ij}$  les éléments de la matrice  $A$ , on a donc pour tout  $j$

$$\mathbf{x}_{2j} = \sum_i a_{ij}\mathbf{x}_{1i} . \quad (3.105)$$

Si le  $k$ ème paramètre  $\beta_{1k}$  de  $\boldsymbol{\beta}_1$  est estimable, le coefficient  $a_{kj}$  de la colonne  $\mathbf{x}_{1k}$  associée est obligatoirement nul, car dans le cas contraire, cette colonne serait combinaison linéaire des autres d'après (3.105). Ceci étant vrai pour tout  $j$ , la ligne  $k$  de  $A$  est nulle.

A titre d'exemple, le tableau 3.67 donne les fonctions estimables obtenues pour la fraction déduite, par agrégation de niveaux, de celle de type 1 figurant à gauche du tableau 3.57. Les effets  $y$  apparaissent sans la notation  $e()$  pour alléger l'écriture. Les deux ensembles de fonctions estimables donnés correspondent à deux paramétrisations distinctes  $P_1$ ,  $P_2$  qui peuvent toutes les deux être obtenues par la méthode générale du § 3.10.3. La première  $P_1$  s'obtient en donnant au niveau 1 de  $A$  un poids double de celui des deux autres niveaux 0 et 2, tandis que la seconde  $P_2$  correspond à l'équipondération des niveaux. Les bases orthogonales sélectionnées sont, pour  $A$  celles qui figurent au tableau 3.63, pour les facteurs à 2 niveaux la base formée des vecteurs  $(1,1)'$  et  $(1,-1)'$ , enfin pour le facteur journée  $j$  la base figurant au tableau 3.66.

Les paramètres de  $P_1$  sont, à des coefficients de proportionnalité près, ceux qui sont issus de la fraction régulière  $4^12^6/8$ . Plus précisément, les notations  $A$ ,  $A^2$  associées aux vecteurs  $\mathbf{x}_{11}$ ,  $\mathbf{x}_{12}$  correspondent respectivement à  $e(A_1)$ ,  $e(A_1A_2)$  et la correspondance pour le

niveau	$\pi_J$	$\mathbf{x}_{10}$	$\mathbf{x}_{11}$	$\mathbf{x}_{12}$	$\mathbf{x}_{13}$	$\mathbf{x}_{14}$	$\mathbf{x}_{15}$	$\mathbf{x}_{16}$	$\mathbf{x}_{17}$
		1	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$j_1j_2$	$j_1j_3$	$j_2j_3$	$j_1j_2j_3$
0	1/8	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1/8	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
2	1/8	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
3	1/8	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
4	1/8	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
5	1/8	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
6	1/8	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
7	1/8	1	1	1	1	1	1	1	1

TAB. 3.66 – Base orthonormée de  $\mathbb{R}^8$  utilisée pour définir les effets blocs

facteur bloc  $j$  est celle indiquée en haut du tableau 3.66. Ces paramètres conduisent à des confusions simples et à la résolution 4. Cette résolution est perdue avec la paramétrisation  $P_2$ , qui est donc très mal adaptée à l'analyse d'un tel plan.

$P_1$	$P_2$	suite	
$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$
$A$	$A$	$A.E$	$A.E$
$A^2$	$A^2$	$A^2.E + C.G + D.F + j^7$	$A^2.E + 2\sqrt{2}(C.G + D.F + j^7)/3$
$B$	$B$	$A.F$	$A.F$
$C$	$C + E.G/3$	$A^2.F + D.E$	$A^2.F + 2\sqrt{2}D.E/3$
$D$	$D + E.F/3$	$A.G$	$A.G$
$E$	$E + (C.G + D.F + j^7)/3$	$A^2.G + C.E$	$A^2.G + 2\sqrt{2}C.E/3$
$F$	$F + D.E/3$	$B.C + j^4$	$B.C + j^4$
$G$	$G + C.E/3$	$B.D + j^5$	$B.D + j^5$
$A.B$	$A.B$	$B.E$	$B.E$
$A^2.B$	$A^2.B$	$B.F + j^2$	$B.F + j^2$
$A.C$	$A.C$	$B.G + j^3$	$B.G + j^3$
$A^2.C + E.G$	$A^2.C + 2\sqrt{2}E.G/3$	$C.D + F.G + j^6$	$C.D + F.G + j^6$
$A.D$	$A.D$	$C.F + D.G + j$	$C.F + D.G + j$
$A^2.D + E.F$	$A^2.D + 2\sqrt{2}E.F/3$		

TAB. 3.67 – Confusions d'effets avec deux paramétrisations distinctes  $P_1$ ,  $P_2$

### 3.11 Génération automatique de fractions régulières

Il existe de nombreux catalogues de plans fractionnaires. La pratique montre cependant qu'il est utile de disposer aussi d'un algorithme capable de générer automatiquement, par recherche rétro-récurrente, un ou des plans réguliers adaptés à des spécifications particulières non prévues dans les catalogues.

Ainsi dans l'exemple 3.1, la fraction  $2^{11-5}$  tabulée, qui est la fraction d'aberration minimum, et aussi celle qui confond un nombre minimum d'interactions de deux facteurs, a l'inconvénient d'utiliser 10 des 11 facteurs dans ses mots de définition de 4 lettres. La recherche automatique d'une fraction permettant d'estimer, dans le cadre du modèle contenant les interactions de deux facteurs, toutes les interactions avec 3 facteurs  $A$ ,  $B$ ,  $C$  déterminés a permis dans ce cas d'obtenir les fractions du tableau 3.26, qui bien que confondant un nombre plus grand d'interactions de deux facteurs, sont mieux adaptées si certains facteurs sont a priori plus importants que d'autres.

Les répartitions en blocs des tableaux 3.43 et 3.47 ont aussi été obtenues par recherche automatique.

Pour effectuer une telle recherche automatique, on spécifie, après avoir précisé les facteurs de base et les facteurs définis,

1. le modèle, ensemble  $\mathcal{M}$  des effets supposés non nuls,
2. et le sous ensemble  $\mathcal{E}$  des effets à estimer.

La notation additive est la plus adaptée pour cette recherche. On a vu (§ 3.4.1) que l'ajout d'une constante à certains facteurs définis, qui correspond à la multiplication par une racine de l'unité en notation multiplicative, ne modifie pas les sous-ensembles d'effets confondus. Il est donc possible d'imposer l'absence de constante. Un effet  $e \in \mathcal{E}$  est alors estimable si la combinaison linéaire de facteurs associée n'est égale, sur la fraction, à aucune des combinaisons linéaires associées aux effets distincts non nuls  $f \in \mathcal{M}$ . Autrement dit, si  $C(g)$  désigne la combinaison linéaire associée à un effet  $g$ ,  $e$  est estimable si pour tout  $f \neq e$  dans  $\mathcal{M}$ ,  $C(e) - C(f)$  est différent de 0 sur la fraction.

Etendant un peu la terminologie utilisée jusqu'ici essentiellement en notation multiplicative avec des facteurs à 2 niveaux, nous appellerons *mot* une combinaison linéaire de facteurs et *mots de définition* les combinaisons qui s'annulent sur la fraction. L'ensemble des effets de  $\mathcal{E}$  est donc estimable dans le cadre du modèle  $\mathcal{M}$  si aucune différence  $C(e) - C(f)$  avec  $e \in \mathcal{E}$ ,  $f \in \mathcal{M}$ ,  $e \neq f$  n'est un mot de définition. Ces différences sont dites *inélégibles* [Franklin et Bailey, 1977] [Franklin, 1985].

La détermination de l'ensemble des mots inélégibles est l'étape préliminaire d'une recherche rétro-récurrente. Lors de l'introduction rétro-récurrente d'un nouveau facteur en cours de recherche, la condition à vérifier est qu'aucun des mots de définition générés n'est inélégible. Nous explicitons ceci sur des exemples et montrons aussi comment des ensembles inélégibles plus compliqués, impliquant plusieurs couples  $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ , peuvent devenir parfois nécessaires.

### Plan de résolution 3.

Soit à chercher une fraction  $2^{6-3}$  de résolution 3 pour 6 facteurs  $A, B, C, D, E, F$ . Les effets à estimer et les effets non nuls forment donc un même ensemble  $\mathcal{E} = \mathcal{M}$  auquel est associé l'ensemble des mots  $\{0, A, B, C, D, E, F\}$ . Les mots de définition ne doivent comporter aucune différence entre deux de ces éléments distincts, c'est-à-dire aucun des  $21 = 6 + 15$  mots  $\{A, \dots, F, A + B, \dots, E + F\}$  qui constituent *l'ensemble inélégible*.

Prenons  $A, B, C$  comme facteurs de base et définissons successivement  $D, E, F$  par rétro-réurrence. Lors du choix de  $D$ , il faut éviter d'obtenir  $D, D + A, D + B, D + C$  comme mot de définition. Ceci exclut les choix  $\{0, A, B, C\}$  pour  $D$  et laisse disponible les 4 choix  $\{A + B, A + C, B + C, A + B + C\}$ . On sélectionne l'un d'eux, par exemple  $D = A + B$ , et on poursuit la rétro-réurrence en cherchant  $E$ . L'inéligibilité des mots  $E, E + A, E + B, E + C, E + D$  exclut du choix  $0, A, B, C$  et  $D = A + B$ . Si on retient alors  $E = A + C$ , il reste disponible pour le facteur  $F$  les choix  $\{B + C, A + B + C\}$ . La rétro-réurrence aboutit donc ici sans qu'il soit besoin de revenir sur un choix précédent.

Pour compliquer un peu, supposons qu'il y a de bonnes raisons de suspecter l'existence

d'une interaction  $AB$ , si bien que les combinaisons linéaires associées aux effets du modèle sont  $\{0, A, B, C, D, E, F, A + B\}$ . Que l'on garde le même ensemble d'effets à estimer, ou que l'on adjoigne  $A + B$  également à celui-ci, l'ensemble inéligible s'obtient en adjoignant  $A + B + C$ ,  $A + B + D$ ,  $A + B + E$ ,  $A + B + F$  aux 21 mots inéligibles précédents. Le choix  $A + B$  devient alors exclu pour  $D$ ,  $E$ ,  $F$  qui sont nécessairement égaux, à une permutation près, aux sommes  $A + C$ ,  $B + C$ ,  $A + B + C$ . Il est clair que l'ajout au modèle d'une autre interaction conduit dans cet exemple à l'impossibilité de définir les trois facteurs  $D$ ,  $E$ ,  $F$ .

### Répartition en bloc du tableau 3.47

Les facteurs de base sont  $A_1, A_2, B_1, B_2, C, D$ , les facteurs définis  $E, F$  et les pseudofacteurs blocs  $R_1, R_2, R_3$ . On impose  $E = A_1 + B_1 + C + D$ ,  $F = A_2 + B_2 + C + D$ . Le modèle contient la constante, tous les effets principaux et interactions de deux facteurs et les 7 effets blocs associés aux sommes  $R_1, R_2, R_3, R_1 + R_2, R_1 + R_3, R_2 + R_3, R_1 + R_2 + R_3$ . Les effets à estimer sont les effets principaux des facteurs traitements et les trois effets blocs  $R_1, R_2, R_1 + R_2$ . A l'ensemble inéligible déduit de ce modèle et de ces effets à estimer, il convient d'ajouter le cas échéant tous les mots formés avec des pseudofacteurs issus d'un même facteur. Une relation entre de tels pseudofacteurs impliquerait en effet que le facteur concerné ne prenne pas tous ses niveaux sur le plan. Ici ce rajout est inutile car les mots en question sont déjà dans l'ensemble des différences  $C(e) - C(f)$ . Par exemple, les mots formés avec  $R_1, R_2, R_3$  sont les différences  $R_1 = R_1 - 0$ ,  $R_2 = R_2 - 0$ ,  $R_1 + R_2 = R_1 + R_2 - 0$ ,  $R_1 + R_3 = R_2 - (R_1 + R_2 + R_3)$ ,  $R_2 + R_3 = R_1 - (R_1 + R_2 + R_3)$ ,  $R_1 + R_2 + R_3 = R_1 - (R_2 + R_3)$ .

### Ensemble inéligible défini par plusieurs paires $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$

Considérons à nouveau la fraction  $2^{11-5}$  de type 2 du tableau 3.26. Dans la recherche qui a permis de la trouver, l'ensemble  $\mathcal{M}$  contenait la moyenne générale, les 11 effets principaux et 55 interactions de deux facteurs, l'ensemble  $\mathcal{E}$  les 11 effets principaux et les 27 interactions avec l'un des facteurs  $A, B$  et  $C$ .

Au § 3.7.2, cette fraction a été divisée en 8 blocs de deux journées définis par les pseudofacteurs  $R_1, R_2, R_3$ , chaque bloc étant subdivisé à l'aide d'un 4ème pseudofacteur  $R_4$  en 2 sous-blocs correspondant aux 2 journées de 4 unités expérimentales.

Pour trouver une subdivision en blocs et sous-blocs adéquate, on a effectué une première recherche rétro-récurrente en rajoutant au modèle les 15 produits entre les pseudofacteurs  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . Après échec de cette recherche, la requête a été assouplie en retirant du modèle les 8 produits incluant  $R_4$  et ne conservant donc, en plus des effets traitements, que les 7 produits entre  $R_1, R_2, R_3$  correspondant aux effets blocs. Cette recherche ayant abouti, on a aussi requis l'estimabilité de tous les effets principaux dans le modèle incluant toutes les interactions et les 15 produits entre  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . Cette recherche a débouché sur les plans présentés qui permettent donc d'estimer intra-bloc, c'est-à-dire par les comparaisons faites à l'intérieur des blocs de deux journées, toutes les interactions avec un des 3 facteurs  $A, B, C$  et permettent d'estimer intra-sous-bloc, donc avec une précision accrue, tous les effets principaux.

L'ensemble des effets inéligibles de cette dernière recherche est donc défini par deux couples  $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ . Le premier sert à requérir l'estimation des interactions avec les 3 facteurs  $A, B, C$  dans le cadre d'un modèle ne contenant pas les effets sous-bloc. Le second impose l'estimabilité des seuls effets principaux des facteurs traitements dans un modèle renforcé incluant les effets sous-bloc. Les mots formés avec  $R_1, R_2, R_3, R_4$  sont systématiquement inclus dans l'ensemble inéligible pour que le plan comporte effectivement 16 sous-blocs.

#### Fraction d'un $4^g 2^h$ de résolution 3, repliable en résolution 4

Pour trouver automatiquement ces plans, présentés au § 3.8.2, on introduit d'abord la paire  $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$  où  $\mathcal{M} = \mathcal{E}$  est l'ensemble des effets principaux. Cette paire garantit la résolution 3. On introduit ensuite une seconde paire  $(\mathcal{M}', \mathcal{E}')$  où  $\mathcal{M}'$  est l'ensemble des interactions de deux facteurs et  $\mathcal{E}'$  l'ensemble des effets principaux de la forme  $A_1 A_2, B_1 B_2, \dots$  où  $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots$  sont les pseudofacteurs issus de la décomposition en pseudofacteurs des facteurs à 4 niveaux  $A, B, \dots$ . Cette seconde paire garantit qu'il ne peut y avoir de mot de définition de longueur 3 incluant un tel produit, donc en particulier de mot de longueur 3 avec un nombre pair de symboles. Elle rajoute cependant des contraintes inutiles en interdisant aussi des mots de longueur 3 ayant 5 symboles tels que  $A_1 A_2 B_1 B_2 C$  où  $C$  est un facteur à 2 niveaux. Pour éviter de rendre inéligibles ces mots, il suffit d'éliminer du modèle  $\mathcal{M}'$  les interactions à 3 symboles de la forme  $B_1 B_2 C$ , ou ce qui revient au même de ne garder que les interactions formées avec 2 ou 4 symboles.

Considérons par exemple le cas où il y a  $N = 16$  unités et  $h_4 = 2$  facteurs  $A, B$  à 4 niveaux. Le nombre  $h_2$  de facteurs à 2 niveaux ne doit pas dépasser 3 si l'on veut obtenir par repliement un plan de résolution 4. En effet, si après repliement on ajoute le facteur  $R$  égal à 1 sur les 16 unités du plan initial, à  $-1$  sur l'opposé, on obtient un plan à 32 unités avec  $h_2 + 1$  facteurs à 2 niveaux. Le tableau 3.51 montre alors que  $h_2 + 1 \leq 4$ .

La recherche conduite avec les termes inéligibles mentionnés ci-dessus donne, à une équivalence près, la fraction définie par

$$C = A_1 B_1, \quad D = A_2 B_2, \quad E = A_1 A_2 B_1 B_2$$

qui a pour mots de définition

$$A_1 B_1 C, \quad A_2 B_2 D, \quad A_1 A_2 B_1 B_2 C D, \quad A_1 A_2 B_1 B_2 E, \quad A_2 B_2 C E, \quad A_1 B_1 D E, \quad C D E .$$

Par repliement (et ajout éventuel du facteur  $R$ ), on obtient la fraction à 32 unités ayant les mots de définition

$$A_1 A_2 B_1 B_2 C D, \quad A_2 B_2 C E, \quad A_1 B_1 D E, \quad (A_1 B_1 C R, \quad A_2 B_2 D R, \quad A_1 A_2 B_1 B_2 E R, \quad C D E R) .$$

Dans ce cas, il est impératif de ne pas laisser dans le modèle  $\mathcal{M}'$  d'interaction à 3 symboles comme  $B_1 B_2 E$  qui entraînerait l'inéligibilité de termes comme  $A_1 A_2 B_1 B_2 E$ .

Pour décrire les paires  $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ ,  $(\mathcal{M}', \mathcal{E}')$  de façon concise, il est bien sûr souhaitable de disposer d'une méthode symbolique de notation de tels ensembles comme la suivante, qui est celle utilisée par PLANOR [Kobilinsky, 1994]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} & : A + B + C + D + E, & \mathcal{E} & : A + B + C + D + E \\ \mathcal{M}' & : P.P, & \mathcal{E}' & : A_1.A_2 + B_1.B_2 \\ \text{où } P & = A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + C + D + E \end{aligned} .$$

Puisqu'il n'y a que deux facteurs à 4 niveaux, il ne peut y avoir de mots de longueur 3 ayant 6 symboles. Autrement, il faudrait rajouter à  $\mathcal{M}'$  une somme du type  $Q.Q$  avec  $Q = A_1.A_2 + B_1.B_2 + \dots$

### 3.12 Plans asymétriques pour facteurs quantitatifs ou qualitatifs à 2 et 4 niveaux

La technique de décomposition en pseudofacteurs utilisée au § 3.8 pour construire des plans avec des facteurs à 4 et 2 niveaux peut être utilisée quand certains des facteurs à 4 niveaux sont quantitatifs. Mais si  $A$  est un tel facteur quantitatif à 4 niveaux, il y a dissymétrie entre les trois effets  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_1A_2$  et il est possible de jouer sur cette dissymétrie pour sélectionner une fraction appropriée.

Les effets qui ont vraiment du sens et servent à formaliser les hypothèses lorsqu'il y a des facteurs quantitatifs sont les effets dit polynomiaux. Par *effets polynomiaux* on entend tous les effets, quelles que soient les natures qualitatives ou quantitatives des facteurs qu'ils contiennent, où les facteurs quantitatifs apparaissent sous forme polynomiale. Par exemple, si  $A$  est quantitatif à 4 niveaux,  $B$  qualitatif à 2 niveaux, les effets polynomiaux sont les effets principaux  $B$ ,  $\text{lin } A$ ,  $\text{quad } A$ ,  $\text{cub } A$  et les interactions  $\text{lin } A.B$ ,  $\text{quad } A.B$ ,  $\text{cub } A.B$ . Ils sont à distinguer des *effets pseudofactoriels* associés aux produits entre pseudofacteurs:  $B$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_1.B$ ,  $A_2.B$ ,  $A_1A_2.B$ .

Le paragraphe 3.12.1 rappelle succinctement comment sont définis ces effets polynomiaux dans le cas général de facteurs ayant des nombres quelconques de niveaux. L'approche retenue a déjà fait l'objet de plusieurs articles auxquels on pourra se référer pour trouver des développements plus explicites [Kobilinsky, 1988], [Durier et Kobilinsky, 1989], [Cliquet et al, 1994].

Les paragraphes suivants précisent, dans le cas des facteurs à 4 et 2 niveaux, les relations entre effets polynomiaux et pseudofactoriels et exploitent ces relations pour sélectionner de bonnes fractions. Une approche similaire permet aussi de construire de bons plans lorsque les facteurs quantitatifs ont des nombres de niveaux plus grands que 4 [Kobilinsky, 1985a] [El Mossadeq and Kobilinsky, 1992].

#### 3.12.1 Facteurs quantitatifs et effets polynomiaux

Considérons d'abord le cas d'un unique facteur quantitatif  $A$ , variant dans un intervalle  $[a,b]$ . On note  $\tau(A)$  la réponse théorique pour  $A \in [a,b]$ . Pour résumer le comportement de  $\tau$ , une possibilité est de l'approcher successivement par une constante, une droite, une parabole, une cubique, etc . . . . On utilise, pour mesurer la qualité de l'approximation, la distance de  $L^2(\pi)$  où  $\pi$  est une mesure sur  $[a,b]$  telle que  $\pi([a,b]) = 1$ , c'est-à-dire une probabilité. Ainsi, la parabole d'équation  $a + bA + cA^2$  la plus proche de  $\tau$  est celle qui minimise

$$\int_a^b (\tau(A) - (a + bA + cA^2))^2 d\pi(A) .$$

On définit la moyenne générale, les effets linéaire, quadratique, cubique de  $A$  comme étant, à une constante près, les coefficients du terme de plus haut degré des polynômes correspondants.

Les approximations et effets sont obtenus explicitement en introduisant les polynômes orthogonaux normés  $P_0, P_1, P_2, \dots$  définis par orthonormalisation successive des puissances  $A^0, A^1, A^2, \dots$  de  $A$ . Par définition

$$P_0(A) = 1, \quad P_1(A) = a_{01} + a_{11}A, \quad P_2(A) = a_{02} + a_{12}A + a_{22}A^2, \dots$$

où les coefficients sont tels que

$$\begin{aligned} \Pi(P_i, P_j) &= \int_a^b P_i(A) P_j(A) d\pi(A) = 1 \quad \text{si } i = j, \\ &= 0 \quad \text{si } i \neq j. \end{aligned}$$

La constante, la droite, la parabole, ... approximant le mieux  $\tau$  sont alors

$$\begin{aligned} \text{constante} &: \Pi(\tau, P_0) P_0 \\ \text{droite} &: \Pi(\tau, P_0) P_0 + \Pi(\tau, P_1) P_1 \\ \text{parabole} &: \Pi(\tau, P_0) P_0 + \Pi(\tau, P_1) P_1 + \Pi(\tau, P_2) P_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

La moyenne générale, les effets linéaire, quadratique, cubique, etc ... de  $A$  sont donc les produits scalaires  $\Pi(\tau, P_0), \Pi(\tau, P_1), \Pi(\tau, P_2), \Pi(\tau, P_3), \dots$

Lorsqu'il y a plusieurs facteurs, qualitatifs ou quantitatifs, les effets sont définis comme au § 3.10.3. Si  $A_j$  est quantitatif, les vecteurs  $\mathbf{x}_{j0}, \mathbf{x}_{j1}, \mathbf{x}_{j2}, \dots$  sont pris égaux aux polynômes orthogonaux normés. Leur nombre est dans ce cas limité au degré maximal considéré (la dimension de  $L^2(\pi)$  peut être infinie si le support de  $\pi$  n'est pas fini).

L'effet  $e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h})$  défini par (3.88), qualifié dans ce cas *d'effet polynomial*, est une interaction entre les facteurs  $A_j$  tels que  $a_j \neq 0$  (un effet principal si un seul  $a_j$  est non nul) qui est de degré  $a_j$  en  $A_j$  si ce facteur est quantitatif. Pour l'interprétation, on regroupe les effets d'une même interaction (effet principal) ayant un degré donné pour chaque facteur quantitatif.

★ Les effets polynomiaux  $e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h})$  ont la propriété suivante qui généralise ce qui a été observé dans le cas d'un unique facteur quantitatif. Quelle que soit la réponse théorique  $\tau \in L^2(\pi)$ , où  $\pi = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_h$ , sa meilleure approximation par une fonction de la forme

$$\phi = \sum_{(a_1, \dots, a_h) \in \mathcal{A}} \mathbf{x}_{1a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{ha_h} \alpha(a_1, \dots, a_h) \quad (3.106)$$

au sens de la métrique de  $L^2(\pi)$  est obtenue quand les coefficients  $\alpha(a_1, \dots, a_h)$  sont les effets  $e(A_1^{a_1} \dots A_h^{a_h})$ .

Posons  $(a_1, \dots, a_h) \leq (b_1, \dots, b_h)$  si  $a_j \leq b_j$  pour tout facteur  $A_j$  quantitatif et  $b_j = 0 \implies a_j = 0$  pour tout facteur qualitatif. Les fonctions  $\phi$  de la forme (3.106) auxquelles on s'intéresse en pratique vérifient l'hypothèse suivante, généralisation de (3.94) :

$$(b_1, \dots, b_h) \in \mathcal{A}, \quad (a_1, \dots, a_h) \leq (b_1, \dots, b_h) \implies (a_1, \dots, a_h) \in \mathcal{A}. \quad (3.107)$$

Sous cette hypothèse, les fonctions  $\phi$  de la forme (3.106) sont les fonctions usuellement utilisées pour décrire le modèle en analyse de variance et covariance et sont en particulier indépendantes des mesures  $\pi_j$  utilisées pour reparamétriser. Plus précisément, elles s'écrivent sous la forme d'une somme

$$\phi(A_1, \dots, A_h) = \sum \left( \prod_{j \in K} A_j^{a_j} \right) \alpha_J((A_j)_{j \in J}) . \quad (3.108)$$

Chaque terme de cette somme est caractérisé par son sous-ensemble  $J$  de facteurs qualitatifs, son sous-ensemble  $K$  de facteurs quantitatifs et les degrés  $a_j$ ,  $j \in K$ , correspondants. Par ailleurs, si un autre terme a le même  $J$  et un monôme  $\prod_{j \in K} A_j^{b_j}$  satisfaisant  $b_j \leq a_j$  pour  $j \in K$ , c'est-à-dire de degré inférieur en chaque  $A_j$ , il doit également figurer dans la somme.

A chaque terme de (3.108) peut être associé l'ensemble des  $h$ -uplets  $(a_1, \dots, a_h)$  où  $a_j$  est le degré pour un facteur quantitatif, un entier quelconque ( $\leq n_j$ ) si  $j \in J$  et 0 si  $j \notin J \cup K$ . L'union de ces ensembles est l'ensemble  $\mathcal{A}$  figurant dans la forme (3.106) de  $\phi$ .

Le choix de la mesure  $\pi_j$  pour un facteur quantitatif comporte comme dans le cas d'un facteur qualitatif une certaine part d'arbitraire. Un choix naturel est la mesure uniforme sur l'intervalle de variation considéré. Si le choix des niveaux est restreint à un ensemble fini  $T_j$ , un autre choix naturel est la mesure uniforme sur  $T_j$ . Lorsque l'ensemble est formé par des niveaux équiespacés, les polynômes orthogonaux et effets associés sont ceux qui sont classiquement considérés et tabulés [Fisher and Yates, 1953].

### 3.12.2 Relations entres effets polynomiaux et pseudofactoriels

Considérons maintenant le cas où on impose à un facteur quantitatif  $A$  de prendre 4 niveaux équiespacés et où la mesure  $\pi$  correspondante donne un poids 1/4 à chacun de ces 4 niveaux. En changeant d'origine et d'échelle, on peut toujours se ramener au cas où ces 4 niveaux sont  $-3, -1, 1, 3$ . Dans ce cas, les polynômes orthogonaux sont

$$P_0(A) = 1, \quad P_1(A) = A/\sqrt{5}, \quad P_2(A) = (A^2 - 5)/4, \quad P_3(A) = (5A^3 - 41A)/12\sqrt{5} .$$

Il sont également notés **1**,  $\text{lin } A$ ,  $\text{quad } A$ ,  $\text{cub } A$ . Le tableau 3.68 donne dans sa partie gauche leurs valeurs pour les différents niveaux de  $A$ . Dans la partie droite, on a indiqué une décomposition de  $A$  en deux pseudofacteurs  $A_1, A_2$  et on a fait figurer le produit  $A_1 A_2$ . Il est facile de vérifier que cette décomposition induit les relations du tableau 3.69

	<b>1</b>	$\text{lin } A$	$\text{quad } A$	$\text{cub } A$			
$A$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$A_1$	$A_2$	$A_1 A_2$
$-3$	1	$-3/\sqrt{5}$	1	$-1/\sqrt{5}$	$-1$	$-1$	1
$-1$	1	$-1/\sqrt{5}$	$-1$	$3/\sqrt{5}$	$-1$	1	$-1$
1	1	$1/\sqrt{5}$	$-1$	$-3/\sqrt{5}$	1	$-1$	$-1$
3	1	$3/\sqrt{5}$	1	$1/\sqrt{5}$	1	1	1

TAB. 3.68 – Polynômes orthogonaux et pseudofacteurs pour un facteur à 4 niveaux

entre les vecteurs du tableau 3.68.

$$\begin{array}{ll}
A_1 & = (2 \text{ lin } A - \text{ cub } A)/\sqrt{5} & \text{lin } A & = (2A_1 + A_2)/\sqrt{5} \\
A_1 A_2 & = \text{ quad } A & \text{quad } A & = A_1 A_2 \\
A_2 & = (\text{ lin } A + 2 \text{ cub } A)/\sqrt{5} & \text{cub } A & = (-A_1 + 2A_2)/\sqrt{5}
\end{array}$$

TAB. 3.69 – Relations entre effets polynomiaux et pseudofactoriels

Dans le cas général d'un mélange de facteurs qualitatifs et quantitatifs à 4 et 2 niveaux, ces relations peuvent être utilisées pour exprimer un effet polynomial en fonction des effets pseudofactoriels ou réciproquement un effet pseudofactoriel en fonction des effets polynomiaux. Par exemple, soit  $B$  un autre facteur quantitatif à 4 niveaux décomposé comme  $A$ , et  $C$  un facteur à 2 niveaux. On note aussi  $C$  le vecteur  $(1, -1)'$  utilisé pour définir l'effet de  $C$ . Considérons un effet factoriel tel que  $e(AB^2)$ , égal par définition à  $\Pi(\boldsymbol{\tau}, \text{ lin } A \otimes \text{ quad } B \otimes \mathbf{1})$ . On a

$$\text{lin } A \otimes \text{ quad } B \otimes \mathbf{1} = (2A_1 + A_2) \otimes B_1 B_2 \otimes \mathbf{1} / \sqrt{5} = (2A_1 \otimes B_1 B_2 \otimes \mathbf{1} + A_2 \otimes B_1 B_2 \otimes \mathbf{1}) / \sqrt{5}$$

et donc

$$e(AB^2) = (2e(A_1 B_1 B_2) + e(A_2 B_1 B_2)) / \sqrt{5}.$$

On exprime de même un effet pseudofactoriel en fonction des effets polynomiaux. Les calculs peuvent être présentés plus simplement en omettant les symboles  $\otimes$  et les vecteurs constants  $\mathbf{1}$ . Leur résultat peut s'interpréter immédiatement comme une relation entre des effets si on représente des effets tels que  $e(AB^2)$ ,  $e(A_1 A_2 C)$  par les produits  $\text{ lin } A \text{ quad } B$  et  $A_1 A_2 C$  correspondants. On obtient ainsi par exemple

$$\begin{array}{ll}
A_2 C & = (\text{ lin } A + 2 \text{ cub } A)C / \sqrt{5} & = (\text{ lin } A.C + 2 \text{ cub } A.C) / \sqrt{5}, \\
A_1 B_1 & = (2 \text{ lin } A - \text{ cub } A)(2 \text{ lin } B - \text{ cub } B) / 5 = \\
& \quad (4 \text{ lin } A \text{ lin } B - 2 \text{ cub } A \text{ lin } B - 2 \text{ lin } A \text{ cub } B + \text{ cub } A \text{ cub } B) / 5, \\
A_1 A_2 B_1 & = \text{ quad } A(2 \text{ lin } B - \text{ cub } B) / \sqrt{5} & = (2 \text{ quad } A \text{ lin } B - \text{ quad } A \text{ cub } B) / \sqrt{5} \\
\text{ lin } A \text{ lin } B & = (2A_1 + A_2)(2B_1 + B_2) / 5 & = (4A_1 B_1 + 2A_2 B_1 + 2A_1 B_2 + A_2 B_2) / 5.
\end{array}$$

Ces relations et les hypothèses effectuées sur les effets polynomiaux permettent de hiérarchiser les différents effets pseudofactoriels et suggèrent des stratégies de recherche de plans réguliers.

Lorsque tous les facteurs sont qualitatifs, le principal critère de classification d'un effet factoriel est le nombre de facteurs qui y apparaissent. Une hypothèse réaliste, lorsqu'on dispose de peu d'information a priori, est qu'un tel effet est d'autant plus faible que ce nombre est plus grand. En particulier, les interactions de trois facteurs et plus sont souvent supposées nulles, ce qui amène à rechercher des plans de résolution 5.

Ce nombre de facteurs figurant dans l'effet reste un élément important pour classer les effets polynomiaux dans le cas où il y a des facteurs quantitatifs. Mais un autre critère intervient dans ce cas: le degré de l'effet polynomial. Ce degré est 1 pour un facteur qualitatif et égal au degré polynomial pour un facteur quantitatif, c'est-à-dire à 1 pour un effet linéaire, 2 pour un effet quadratique, 3 pour un effet cubique, ... . Le degré d'un effet faisant intervenir plusieurs facteurs est la somme des degrés en chaque facteur. Ainsi les degrés de  $\text{ lin } A \text{ quad } B$ ,  $\text{ cub } A.C$  sont respectivement  $3 = 1 + 2$  et  $4 = 3 + 1$ . Une hypothèse fréquemment formulée est que les effets polynomiaux de degré 3 ou plus sont nuls. Une hypothèse moins restrictive est que seuls sont nuls les effets polynomiaux de

degré 3 n'appartenant pas aux effets principaux, c'est-à-dire impliquant au moins deux facteurs.

Deux approches peuvent être utilisées pour exploiter les hypothèses sur les effets polynomiaux. Dans la première [Kobilinsky, 1985a], on s'appuie exclusivement sur les effets pseudofactoriels nuls pour trouver un plan régulier. Le plan résultant est orthogonal vis à vis du modèle polynomial et permet d'estimer les effets polynomiaux avec une efficacité de 1, c'est-à-dire avec une variance identique, à la correction pour la taille près, à celle d'un plan factoriel complet. Dans la seconde [Edmondson, 1991, 1993], une utilisation plus fine des relations du tableau 3.69 permet d'obtenir des plans ayant un nombre d'unités beaucoup plus faible. Ceux-ci ne sont plus orthogonaux, mais conservent néanmoins d'excellentes efficacités pour estimer les effets polynomiaux.

Les deux approches conduisent en général à des plans ayant des propriétés de distribution uniforme des points qui les rendent assez robustes vis à vis du modèle sélectionné et pour cette raison préférable dans de nombreux cas aux plans  $D$ -optimaux obtenus par des procédures algorithmiques.

### 3.12.3 Plans réguliers orthogonaux pour le modèle polynomial

Sous l'hypothèse que les effets polynomiaux de degré 3 ou plus sont nuls, les effets pseudofactoriels s'expriment uniquement à partir d'effets polynomiaux de degré 3 ou plus sont également nuls. En incluant les autres effets pseudofactoriels, non nuls, à la fois dans le modèle et dans les termes à estimer, on est alors certain d'obtenir un plan permettant d'estimer tous les effets polynomiaux de degré 1 ou 2. Le plan obtenu est orthogonal vis à vis de ces effets polynomiaux qu'il estime avec la même efficacité qu'un plan factoriel complet, c'est-à-dire avec une efficacité de 1. Cette efficacité n'est pas toujours dans ce cas l'efficacité maximum, mais les plans ainsi construits ont une très bonne efficacité globale et aussi une bonne robustesse vis à vis du modèle.

Considérons par exemple un cas où il y a 16 unités, deux facteurs quantitatifs  $A$  et  $B$  à 4 niveaux, un facteur qualitatif  $C$  à deux niveaux.

Si les effets polynomiaux de degré 3 et plus sont nuls, il en est de même de tous les effets pseudofactoriels contenant 3 symboles ou plus. Par exemple,  $A_1A_2B_1 = (2 \text{ quad } A \text{ lin } B - \text{quad } A \text{ cub } B)/\sqrt{5}$  est nul puisque  $\text{quad } A \text{ lin } B$  et  $\text{quad } A \text{ cub } B$ , de degrés 3 et 5 respectivement, sont tous deux nuls.

Le plan de résolution 5 défini par  $A_1A_2B_1B_2C = 1$  permet alors d'estimer tous les effets pseudofactoriels à 1 ou 2 symboles, et par suite tous les effets polynomiaux de degré 1 ou 2. Il est donc adapté à la nature quantitative des facteurs  $A$  et  $B$ .

De façon générale, on obtient facilement le plus petit degré des effets polynomiaux en fonction desquels s'exprime un effet pseudofactoriel. Par exemple, si  $A, B$  sont quantitatifs à 4 niveaux,  $C$  qualitatif à 4 niveaux, ce plus petit degré est 4 pour l'effet  $A_1B_1B_2C_1C_2$ . On totalise pour l'obtenir le nombre de pseudofacteurs issus de facteurs quantitatifs et le nombre de facteurs qualitatifs, soit ici 3 pour les trois pseudofacteurs  $A_1, B_1, B_2$  et 1 pour le facteur qualitatif  $C$ .

De ce mode de calcul, il résulte que si le dispositif est de résolution 5 lorsqu'on assimile à des facteurs les pseudofacteurs issus de facteurs quantitatifs, il permet d'estimer orthogonalement tous les effets d'un modèle polynomial de degré 2.

Ainsi avec 64 unités, il est possible d'étudier, en résolution 5, jusqu'à 8 facteurs à 2 niveaux. La substitution à certains facteurs de pseudofacteurs issus de facteurs quantitatifs à 4 niveaux permet d'obtenir des plans orthogonaux pour un modèle de degré 2 avec 1, 2, 3 ou 4 facteurs quantitatifs à 4 niveaux et respectivement 6, 4, 2 ou 0 facteurs à deux niveaux. Considérons le cas où il y a 2 facteurs quantitatifs  $A, B$  à 4 niveaux, 4 facteurs  $C, D, E, F$  à deux niveaux. Si  $\mathcal{M} = \mathcal{E}$  est l'ensemble des produits entre 2 des symboles  $A_1, A_2, B_1, B_2, C, D, E, F$ , ce que l'on peut noter symboliquement

$$\mathcal{M} = \mathcal{E} = P.P \quad \text{si } P = A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + C + D + E + F,$$

un plan défini avec  $\mathcal{M}$  pour modèle et  $\mathcal{E}$  pour ensemble à estimer permet d'estimer orthogonalement les 24 effets polynomiaux du modèle de degré 2. Il s'avère qu'il est dans ce cas possible d'imposer des contraintes plus fortes en rajoutant dans  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{E}$  les effets principaux de  $A$  et  $B$  et l'effet d'un facteur bloc  $R$  à 4 niveaux, ce qui peut s'écrire

$$\mathcal{M} = \mathcal{E} = P.P + A + B + R.$$

La recherche rétro-récurrente menée avec ces deux derniers ensembles  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{E}$  donne le plan défini par

$$C = A_1 A_2 B_1 B_2, \quad F = A_1 A_2 D E, \quad R_1 = A_1 B_1 D, \quad R_2 = A_2 B_2 E$$

qui permet donc d'estimer en plus des 24 paramètres du modèle de degré 2, les effets cubiques  $\text{cub } A$ ,  $\text{cub } B$  et les 3 effets blocs  $R_1, R_2, R_1 R_2$ .

### 3.12.4 Plans réguliers non orthogonaux pour le modèle polynomial

La méthode est présentée au travers de deux exemples.

#### Exemple 3.8 . Fraction 1/2 d'un $4 \times 4$ pour deux facteurs quantitatifs

Considérons le cas où il y a deux facteurs quantitatifs  $A$  et  $B$  à 4 niveaux et un modèle supposé de degré 2. Ce modèle a 6 paramètres: la constante, lin  $A$ , lin  $B$ , quad  $A$ , quad  $B$  et lin  $A$  lin  $B$ . Mais il n'y a que 5 effets pseudofactoriels dont l'expression en fonction des effets polynomiaux ne fait apparaître aucun de ces paramètres et qui sont donc nuls:  $A_1 A_2 B_1, A_1 A_2 B_2, A_1 B_1 B_2, A_2 B_1 B_2, A_1 A_2 B_1 B_2$ . La méthode décrite dans le paragraphe précédent ne permet pas dans ce cas de trouver une fraction 1/2 adéquate, car une telle fraction devrait permettre d'estimer  $11 = 16 - 5$  paramètres avec 8 unités seulement. Mais on va voir qu'il est possible de trouver une fraction régulière qui ne rend pas orthogonaux les effets polynomiaux mais permet néanmoins de les estimer avec une très bonne efficacité.

Compte tenu de la nullité supposée des effets polynomiaux de degré 3 ou plus, les effets pseudofactoriels s'expriment sous la forme donnée dans le tableau 3.70.

Il est clair que lin  $A$  peut être estimé à partir d'un seul des deux effets  $A_1$  ou  $A_2$ . Ces deux effets n'apportent cependant pas la même information. A partir d'une estimation

$$\begin{array}{ll}
A_1 & = 2 \operatorname{lin} A / \sqrt{5} & B_1 & = 2 \operatorname{lin} B / \sqrt{5} \\
A_1 A_2 & = \operatorname{quad} A & B_1 B_2 & = \operatorname{quad} B \\
A_2 & = \operatorname{lin} A / \sqrt{5} & B_2 & = \operatorname{lin} B / \sqrt{5} \\
\\ 
A_1 B_1 & = 4 \operatorname{lin} A \operatorname{lin} B / 5 \\
A_1 B_2 & = 2 \operatorname{lin} A \operatorname{lin} B / 5 \\
A_2 B_1 & = 2 \operatorname{lin} A \operatorname{lin} B / 5 \\
A_2 B_2 & = \operatorname{lin} A \operatorname{lin} B / 5
\end{array}$$

TAB. 3.70 – Expression des effets pseudofactoriels dans un modèle de degré 2

$\hat{e}(A_1)$  de variance  $\sigma^2/N$ , où  $N$  est la taille de la fraction, on obtient une estimation  $\sqrt{5}\hat{e}(A_1)/2$  de  $\operatorname{lin} A$  de variance  $(5/4)\sigma^2/N$ , tandis qu'à partir d'une estimation  $\hat{e}(A_2)$  de même variance  $\sigma^2/N$ , on obtient une estimation  $\sqrt{5}\hat{e}(A_2)$  de  $\operatorname{lin} A$  de variance  $5\sigma^2/N$  quatre fois supérieure. Il est donc préférable de confondre  $A_2$  plutôt que  $A_1$  sur la fraction.

Une même remarque s'applique à  $\operatorname{lin} B$  et à  $\operatorname{lin} A \operatorname{lin} B$ . Ainsi ce dernier effet peut être estimé à partir de chacun des effets  $A_1 B_1, A_1 B_2, A_2 B_1, A_2 B_2$ . Mais la variance d'estimation, égale à  $(25/16)\sigma^2/N$  si l'on part d'une estimation  $\hat{e}(A_1 B_1)$  de variance  $\sigma^2/N$ , devient  $(25/4)\sigma^2/N$  si l'on part de  $A_1 B_2$  ou  $A_2 B_1$  et  $25\sigma^2/N$  si l'on part de  $A_2 B_2$ . Les informations apportées, par définition inversement proportionnelles aux variances, sont dans les rapports 16, 4, 4, 1. Lorsqu'on combine plusieurs estimations, les informations se cumulent. Par exemple si on dispose d'estimations indépendantes  $\hat{e}(A_1 B_1), \hat{e}(A_1 B_2)$  de variance  $\sigma^2/N$ , l'estimation combinée de  $\operatorname{lin} A \operatorname{lin} B$

$$\frac{16}{20} \frac{5}{4} \hat{e}(A_1 B_1) + \frac{4}{20} \frac{5}{2} \hat{e}(A_1 B_2)$$

a pour variance  $(25/(16+4))\sigma^2/N$ . Il faut donc confondre en priorité les effets pseudofactoriels apportant le minimum d'information, c'est-à-dire  $A_2 B_2$  et si nécessaire  $A_1 B_2, A_2 B_1$ .

Ces considérations amène à rechercher une fraction 1/2 du plan factoriel complet  $4^2$  ne confondant les effets pseudofactoriels importants  $A_1, A_1 A_2, B_1, B_1 B_2, A_1 B_1$  qu'avec les 5 effets nuls. L'ensemble  $\mathcal{E}$  est donc formé avec ces effets importants et le modèle  $\mathcal{M}$  avec l'ensemble des effets non nuls qui sont ceux où apparaissent au plus 2 pseudofacteurs :

$$\mathcal{E} = A_1 + A_1 A_2 + B_1 + B_1 B_2 + A_1 B_1, \quad \mathcal{M} = P.P \quad \text{où } P = A_1 + A_2 + B_1 + B_2.$$

Cette recherche n'aboutit malheureusement pas.

Il faut donc assouplir la demande en autorisant la confusion des effets importants suscités avec des effets mineurs tels que  $A_2 B_1, A_1 B_2, A_2 B_2$ . Pour cela, la partie à estimer est gardée telle que, mais les trois effets mineurs sont supprimés du modèle. Celui ci peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{M} = A_1.A_2 + B_1.B_2 + A_1.B_1$$

si on convient de rajouter systématiquement les sous-termes, en l'occurrence  $A_1 + A_2 + B_1 + B_2$ . L'étude des alias des solutions obtenues montre qu'il n'y a en fait qu'une solution

définie par la relation  $A_2 B_2 = 1$ . Pour cette solution, les f.e.b sont

$$\begin{array}{llll}
E(\langle \mathbf{y}, \mathbf{1} \rangle / 8) & = e(\mathbf{1}) + e(A_2 . B_2) & E(\langle \mathbf{y}, B_1 \rangle / 8) & = e(B_1) + e(A_2 . B_1 . B_2) \\
E(\langle \mathbf{y}, A_1 \rangle / 8) & = e(A_1) + e(A_1 . A_2 . B_2) & E(\langle \mathbf{y}, A_1 . B_1 \rangle / 8) & = e(A_1 . B_1) + e(A_1 . A_2 . B_1 . B_2) \\
E(\langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8) & = e(A_2) + e(B_2) & E(\langle \mathbf{y}, A_2 . B_1 \rangle / 8) & = e(A_2 . B_1) + e(B_1 . B_2) \\
E(\langle \mathbf{y}, A_1 . A_2 \rangle / 8) & = e(A_1 . A_2) + e(A_1 . B_2) & E(\langle \mathbf{y}, A_1 . A_2 . B_1 \rangle / 8) & = e(A_1 . A_2 . B_1) + e(A_1 . B_1 . B_2) ,
\end{array} \tag{3.109}$$

où  $\mathbf{y}$  est le vecteur des 8 observations,  $\langle \rangle$  le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^8$ .

Compte tenu des égalités du tableau 3.70 et de la nullité des effets pseudofactoriels comprenant 3 ou 4 symboles, le système (3.109) se réécrit sous la forme

$$\begin{array}{llll}
E(\langle \mathbf{y}, \mathbf{1} \rangle / 8) & = e(\mathbf{1}) & + \text{lin } A \text{ lin } B / 5 & E(\langle \mathbf{y}, B_1 \rangle / 8) & = 2 \text{ lin } B / \sqrt{5} \\
E(\langle \mathbf{y}, A_1 \rangle / 8) & = 2 \text{ lin } A / \sqrt{5} & & E(\langle \mathbf{y}, A_1 . B_1 \rangle / 8) & = 4 \text{ lin } A \text{ lin } B / 5 \\
E(\langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8) & = \text{lin } A / \sqrt{5} & + \text{lin } B / \sqrt{5} & E(\langle \mathbf{y}, A_2 . B_1 \rangle / 8) & = 2 \text{ lin } A \text{ lin } B / 5 + \text{quad } B \\
E(\langle \mathbf{y}, A_1 . A_2 \rangle / 8) & = \text{quad } A & + 2 \text{ lin } A \text{ lin } B / 5 & E(\langle \mathbf{y}, A_1 . A_2 . B_1 \rangle / 8) & = 0
\end{array} \tag{3.110}$$

Les produits scalaires de  $\mathbf{y}$  avec  $A_1, B_1, A_1 . B_1$  permettent d'estimer directement les effets linéaires  $\text{lin } A$  et  $\text{lin } B$  et l'interaction  $\text{lin } A \text{ lin } B$ . Les estimations de la moyenne générale et des deux effets quadratiques sont déduites de ces estimations et des produits scalaires avec  $\mathbf{1}, A_1 . A_2, A_2 . B_1$ .

Le tableau 3.71 donne les estimations ainsi obtenues, ainsi que leurs variances et efficacités associées. Le calcul des variances est basé sur le fait que les produits scalaires à gauche de (3.110),  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{1} \rangle / 8, \langle \mathbf{y}, A_1 \rangle / 8, \langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8, \dots$  sont non corrélés de variance  $\sigma^2 / 8$ . La comparaison des variances ainsi obtenues à la variance  $\sigma^2 / 16$  des effets polynomiaux dans le plan factoriel complet donne, après correction pour tenir compte du fait qu'il y a moitié moins d'observations dans la fraction, les efficacités figurant à droite du tableau 3.71. La notation  $e()$  est commode ici pour représenter les estimations en mettant un chapeau ou un tilde sur le  $e$ .

	estimation	variance	efficacité
$\hat{e}(\text{lin } A)$	$= (\sqrt{5}/2) \langle \mathbf{y}, A_1 \rangle / 8$	$(5/4) \sigma^2 / 8$	$4/5$
$\hat{e}(\text{lin } B)$	$= (\sqrt{5}/2) \langle \mathbf{y}, B_1 \rangle / 8$	$(5/4) \sigma^2 / 8$	$4/5$
$\hat{e}(\text{lin } A \text{ lin } B)$	$= (5/4) \langle \mathbf{y}, A_1 B_1 \rangle / 8$	$(25/16) \sigma^2 / 8$	$16/25$
$\hat{e}(\mathbf{1})$	$= (\langle \mathbf{y}, \mathbf{1} \rangle - (1/4) \langle \mathbf{y}, A_1 B_1 \rangle) / 8$	$(17/16) \sigma^2 / 8$	$16/17$
$\hat{e}(\text{quad } A)$	$= (\langle \mathbf{y}, A_1 A_2 \rangle - (1/2) \langle \mathbf{y}, A_1 B_1 \rangle) / 8$	$(5/4) \sigma^2 / 8$	$4/5$
$\hat{e}(\text{quad } B)$	$= (\langle \mathbf{y}, A_2 B_1 \rangle - (1/2) \langle \mathbf{y}, A_1 B_1 \rangle) / 8$	$(5/4) \sigma^2 / 8$	$4/5$

TAB. 3.71 – Estimations des effets polynomiaux dans la fraction  $4^2/2$

L'information apportée par  $\langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8$  sur  $\text{lin } A$  et  $\text{lin } B$  n'a pas été utilisée. Elle peut être utilisée pour obtenir les estimateurs des moindres carrés de ces deux paramètres. Il n'y a à prendre en compte pour faire le calcul que les lignes associées aux produits scalaires  $\langle \mathbf{y}, A_1 \rangle / 8, \langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8, \langle \mathbf{y}, B_1 \rangle / 8$  qui se réécrivent sous la forme matricielle suivante

$$E \begin{bmatrix} \langle \mathbf{y}, A_1 \rangle / 8 \\ \langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8 \\ \langle \mathbf{y}, B_1 \rangle / 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{lin } A \\ \text{lin } B \end{bmatrix} ,$$

et conduisent aux estimations données dans le tableau 3.72.

estimation	variance	efficacité
$\tilde{e}(\text{lin } A) = (\sqrt{5}/12) \left( 5 \langle \mathbf{y}, A_1 \rangle + 2 \langle \mathbf{y}, A_2 \rangle - \langle \mathbf{y}, B_1 \rangle \right) / 8$	$(25/24)\sigma^2/8$	24/25
$\tilde{e}(\text{lin } B) = (\sqrt{5}/12) \left( - \langle \mathbf{y}, A_1 \rangle + 2 \langle \mathbf{y}, A_2 \rangle + 5 \langle \mathbf{y}, B_1 \rangle \right) / 8$	$(25/24)\sigma^2/8$	24/25

TAB. 3.72 – *Estimations des moindres carrés des effets linéaires dans la fraction  $4^2/2$*

Au lieu d'améliorer l'estimation de  $\text{lin } A$  et  $\text{lin } B$  avec l'information apportée par  $\langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8$ , on peut utiliser le pseudofacteur  $A_2$  pour diviser le dispositif en deux blocs. Si on note  $C$  le facteur bloc, on a  $C = A_2$  et la ligne associée à  $A_2$  dans le système (3.110) devient

$$E(\langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8) = \text{lin } A / \sqrt{5} + \text{lin } B / \sqrt{5} + e(C).$$

L'information apportée par  $\langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8$  peut donc être utilisée pour estimer l'effet bloc  $e(C)$ :

$$\hat{e}(C) = \langle \mathbf{y}, A_2 \rangle / 8 - \left( \hat{e}(\text{lin } A) + \hat{e}(\text{lin } B) \right) / \sqrt{5}$$

Cette répartition en deux blocs est utile si la perte d'information sur les effets linéaires qu'elle induit est compensée par la diminution de la variance résiduelle  $\sigma^2$ .

On peut aussi utiliser le pseudofacteur  $A_1 A_2 B_1$  pour définir un second système de deux blocs croisé avec le premier. L'inconvénient est qu'il ne reste alors plus aucun degré de liberté pour estimer la variance d'erreur.

L'intérêt pratique de ce petit exemple est limité, mais il montre bien la souplesse de cette méthode de construction. L'exemple qui suit, extrait de Cliquet et al [1994], illustre l'emploi de cette méthode pour créer un plan de taille nettement plus importante.

**Exemple 3.9 . Fraction  $1/16$  d'un  $4^3 2^4$  avec deux facteurs quantitatifs.** Pour optimiser le milieu de culture d'un Rhizobium symbiote du soja (*Bradyrhizobium japonicum*), on étudie 7 facteurs de composition de ce milieu, dont trois à 4 niveaux et 4 à 2 niveaux. Sur les trois facteurs à 4 niveaux, l'un  $A$  est qualitatif, les deux autres  $B$  et  $C$  quantitatifs.

La recherche effectuée est définie par deux paires *modèle, partie à estimer* notées symboliquement

$$\mathcal{M} = \mathcal{E} = P.P \quad \text{où } P = A + B_1 + C_1 + D + E + F + G,$$

$$\mathcal{M}' = Q.Q, \quad \mathcal{E}' = Q \quad \text{où } Q = A + B + C + D + E + F + G.$$

Le premier couple  $(\mathcal{M}, \mathcal{E})$  permet de s'assurer que les effets principaux et interactions majeures entre deux facteurs ne sont pas confondus entre eux. Sont considérées comme majeures toutes les interactions où n'apparaissent aucun des deux pseudofacteurs  $B_2$  et  $C_2$ .

Le second couple  $(\mathcal{M}', \mathcal{E}')$  impose en outre au plan d'être de résolution 4, c'est-à-dire de permettre l'estimation de tous les effets principaux dans un modèle comportant toutes

les interactions de deux facteurs. L'aspect quantitatif n'est pas pris en compte dans ce second couple, introduit pour assurer un maximum de robustesse à l'estimation des effets principaux de tous degrés.

Une recherche exhaustive complète conduit à un ensemble de 1152 solutions. L'examen de ces solutions, mené par un programme spécifique, montre qu'elles sont toutes dérivées de 6 solutions de base en permutant entre eux les facteurs ou pseudofacteurs ayant des rôles symétriques, c'est-à-dire  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  d'abord, ensuite  $B$  et  $C$  et finalement  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_1A_2$ . Ces 6 solutions de base sont données dans le tableau 3.73, où sont également reportées trois mesures globales d'efficacité permettant de comparer ces solutions du point de vue variance.

Le tableau 3.74 précise les efficacités, pour chaque effet, des trois plans les meilleurs pour l'efficacité globale. Dans le troisième, les interactions incluant  $A$ , qui ont chacune trois degrés de liberté, sont caractérisées par les trois efficacités principales. La plus petite de ces 3 efficacités est la borne inférieure des efficacités pour tous les contrastes appartenant à cette interaction.

plan	relations de définition	trace	dét	val. pr. min.
1	$A_1B_1B_2C_1D = 1$ ; $A_2B_1B_2C_2E = 1$ $A_2B_1C_1C_2F = 1$ ; $A_1B_2C_1C_2G = 1$	0.948	0.976	0.434
2	$A_1B_1B_2C_1D = 1$ ; $A_2B_1B_2C_2E = 1$ $A_1B_1C_1C_2F = 1$ ; $A_1A_2B_2C_1C_2G = 1$	0.934	0.969	0.460
3	$A_1B_2C_1D = 1$ ; $A_2B_2C_2E = 1$ $A_1B_1C_1C_2F = 1$ ; $A_1A_2B_1B_2C_1C_2G = 1$	0.912	0.958	0.460
4	$A_1B_2C_1D = 1$ ; $A_2B_2C_2E = 1$ $A_1B_1C_1C_2F = 1$ ; $A_1A_2B_2C_1C_2G = 1$	0.900	0.956	0.330
5	$A_1B_2C_1D = 1$ ; $A_2B_1C_2E = 1$ $A_1B_1B_2C_2F = 1$ ; $A_2B_2C_1C_2G = 1$	0.883	0.946	0.400
6	$A_1B_2C_1D = 1$ ; $A_1B_1C_2E = 1$ $A_2B_1B_2C_2F = 1$ ; $A_1A_2B_2C_1C_2G = 1$	0.874	0.944	0.330

TAB. 3.73 – Efficacités globales pour les 6 solutions, exemple 3.9

### 3.13 Juxtaposition de plans réguliers

#### 3.13.1 Introduction

Les plans réguliers ont des propriétés d'optimalité fortes pour l'estimation de chaque effet factoriel, ainsi que des propriétés de robustesse vis à vis du modèle pour l'estimation des effets importants. Ainsi, une fraction régulière de résolution 5 donne une estimation optimale de chaque effet principal y compris dans un modèle intégrant les interactions de 3 facteurs.

Effet	Efficacité		
	Plan 1	Plan 2	Plan 3
$A$	1	1	1
lin $B$ , lin $C$	1	1	1
quad $B$ , quad $C$	1	1	1
$D, E, F, G$	1	1	1
$A$ . lin $B$	1	1	1 0.840 0.800
$A$ . lin $C$	1	1	1 0.960 0.840
$AD$	1	1	1 1 0.833
$AE$	1	1	1 1 0.952
$AF, AG$	1	1	1 1 0.800
lin $B$ . lin $C$	0.640	0.960	0.800
lin $B.D$	0.840	0.800	0.840
lin $B.G$	0.840	0.800	0.800
lin $B.E$	0.840	0.800	0.960
lin $B.F$	0.840	0.960	0.800
lin $C.D$	0.840	0.960	0.840
lin $C.E$ , lin $C.F$ , lin $C.G$	0.840	0.800	0.800
$DE$	1	0.800	1
$DF$	1	0.960	1
$DG$	0.810	0.800	1
$EG$	1	0.667	0.800
$EF$	0.810	0.800	0.800
$FG$	1	0.800	0.667

TAB. 3.74 – *Efficacités pour les 3 meilleures solutions pour la trace, exemple 3.9*

Mais la contrainte de régularité impose souvent un nombre d'unités hors de portée de l'expérimentateur. Pour obtenir davantage de souplesse dans la construction tout en gardant certains avantages de la régularité, on peut juxtaposer des fractions orthogonales. C'est ainsi que sont formés nombre de dispositifs classiques, tels que les lattices [Cochran and Cox, 1957], les plans cycliques généralisés [John J.A., 1987], les fractions de plan  $2^h 3^g$  les plus utilisées [Connor et Young, 1961], les 3/4 de plan [John P.W.M, 1971], [McLean et Anderson, 1984], [Diamond, 1981]. Lorsqu'on connaît le principe de construction, il est possible de forger du sur mesure, ou de modifier les plans existants pour s'adapter à des situations particulières.

Les propriétés d'optimalité en variance de quelques uns de ces plans sont connues [Cheng and Bailey, 1991], [Monod and Kobilinsky, 1994]. Mais il reste beaucoup à faire pour mieux connaître leurs caractéristiques et pour avoir des critères de choix entre ces plans et ceux obtenus par des procédures algorithmiques.

Nous donnerons ici une présentation brève de deux exemples très classiques, illustrant les deux modes de juxtaposition qui peuvent être utilisés. Dans le lattice, les fractions régulières juxtaposées confondent des effets différents, si bien que l'information sur chaque effet important n'est perdue que dans une des fractions juxtaposées. Dans le 3/4 de plan, ce sont des fractions parallèles qui sont juxtaposées. Pour un exposé plus complet on se reportera à Kobilinsky et Monod [1995].

### 3.13.2 Répliques du lattice $5 \times 5$

Pour comparer les 25 traitements définis par deux facteurs  $A, B$  à 5 niveaux sur des blocs de taille 5, on forme des *répliques* de 5 blocs comprenant l'ensemble des 25 traitements.

Pour la formation d'une réplique, la théorie présentée dans le cas des facteurs à 2 et 3 niveaux se généralise immédiatement. Les niveaux étant codés par les entiers 0 à 4, le traitement  $(A, B)$  est affecté au bloc  $R$  défini par une relation de définition du type  $R = \alpha A + \beta B \pmod{5}$  où  $\alpha, \beta$  sont aussi des entiers compris entre 0 et 4.

Dans le corps des entiers modulo 5, chaque nombre non nul a un inverse. Si  $\alpha \neq 0$ , il y a donc un entier  $\alpha'$  tel que  $\alpha'\alpha = 1 \pmod{5}$ . On peut alors remplacer  $R$  par  $\alpha'R = A + \alpha'\beta B$  sans changer la répartition en blocs. Il est donc toujours possible de supposer que  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$  et de même, si  $\alpha = 0$ , que  $\beta = 1$ . Les répartitions en blocs distinctes utilisables pour former une réplique par cette méthode sont donc

$$R = B, R = A, R = A + B, R = A + 2B, R = A + 3B, R = A + 4B. \quad (3.111)$$

où les opérations sont effectuées modulo 5.

Les confusions d'effets se déduisent immédiatement de la relation choisie. Par exemple, si  $R = A + 3B$ , on a

$$R = A + 3B, \quad 2R = 2A + B, \quad 3R = 3A + 4B, \quad 4R = 4A + 2B$$

et les f.e.b non réduites à un unique effet sont  $e(R) + e(AB^3)$ ,  $e(R^2) + e(A^2B)$ ,  $e(R^3) + e(A^3B^4)$ ,  $e(R^4) + e(A^4B^2)$ . Les effets traitements confondus dans ce cas sont donc associés aux puissances successives de  $AB^3$ .

Si il y a plusieurs répliques, les relations de définition de (3.111) sont utilisées à tour de rôle pour répartir la perte d'information due aux confusions sur l'ensemble des répliques. La variance d'estimation d'un effet factoriel  $e(A^a B^b)$  est  $\sigma^2/25$  dans les répliques où il n'est pas confondu. Si il y a  $r$  telles répliques sur les  $s$  formées, l'estimateur des moindres carrés de cet effet est la moyenne de ses estimations sur chacune des  $r$  répliques. Sa variance est  $\sigma^2/(25r)$ , sa variance par unité  $25s\sigma^2/(25r) = s\sigma^2/r$  et l'efficacité  $r/s$ . Par exemple, si il y a  $s = 3$  répliques avec les répartitions en blocs définies successivement par  $R = A + B$ ,  $R = A + 2B$ ,  $R = A + 3B$ , les effets principaux et interactions associées aux puissances de  $AB^4$  sont estimées avec l'efficacité 1, les autres avec l'efficacité  $2/3$ .

Lorsqu'il y a 5 répliques ou davantage, l'expérimentateur peut choisir d'utiliser ou de ne pas utiliser les répliques définies par  $R = A$  et  $R = B$ . Dans le premier cas, la perte d'information se trouve répartie sur tous les effets, dans le second cas elle n'est répartie que sur les interactions.

Ce dispositif est souvent utilisé pour répartir en blocs de taille 5 les 25 traitements définis par les 25 niveaux d'un unique facteur. Dans ce cas  $A$  et  $B$  sont des pseudofacteurs issu de la décomposition de ce facteur. Il y a alors complète symétrie entre tous les effets et la répartition des répliques utilise à tour de rôle chacune des 6 répartitions définies par (3.111).

	$p$	1	2	3	4
efficacité	$\frac{44-p}{35-p}$	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	0

TAB. 3.75 – Efficacité dans les 3/4 de plan de John

### 3.13.3 Les 3/4 de plan

Les plus petits plans réguliers de résolution 5 pour 7 facteurs  $A, B, C, D, E, F, G$  à deux niveaux sont des fractions 1/2 à 64 unités. Cette même résolution 5 peut être atteinte avec un plan de 48 unités formé par trois sous-fractions 1/4 parallèles d'une telle fraction 1/2 de résolution 5, par exemple celui défini par

$$ABDEG = -1 \quad \text{et} \quad (ABC, DEF) = (-1, -1), (-1, 1) \text{ ou } (1, -1). \quad (3.112)$$

Pour l'analyser, on fait l'hypothèse que les interactions de 3 facteurs et plus sont nulles. On montre que l'efficacité d'estimation pour un effet non nul dépend alors uniquement du nombre  $p - 1$  d'autres effets non nuls confondus avec lui sur la fraction  $2^7/8$  définie par les trois mots générateurs  $ABDEG$  et  $ABC, DEF$ . Cette efficacité est précisée dans le tableau 3.75. Comme  $ABDEG$  a la longueur 5, le nombre  $p$  d'effets non nuls confondus entre eux est au maximum égal à 4.

Sur la fraction principale 1/8, on a

$$1 = ABDEG = ABC = CDEG = DEF = ABFG = ABCDEF = CFG$$

d'où l'on déduit par exemple

$$A = BDEG = BC = ACDEG = ADEF = BFG = BCDEF = ACFG.$$

Il n'y a que  $p = 2$  effets non nuls parmi ces effets confondus,  $A$  et  $BC$ . L'efficacité d'estimation de  $A$  et de  $BC$  est donc 8/9.

McLean et Anderson [1984] donne les 16 ensembles d'effets non nuls confondus entre eux dans cette fraction 1/8 (dans leur présentation, ils ne prennent en compte le générateur  $ABDEG$  de la fraction 1/2 que si la multiplication par celui-ci fait apparaître un effet non nul). La taille de ces ensembles ne dépasse pas 3 et la fraction à 48 unités définie par (3.112) permet donc d'estimer tous les effets avec une efficacité minimum de 2/3.

Dans cette fraction 3/4 comme dans le cas des fractions régulières, les efficacités d'estimation ne dépendent ni du choix de la demi-fraction de résolution 5, ni de celui des sous-fractions. La fraction définie par  $ABDEG = 1$  et  $(ABC, DEF) = (1, 1), (-1, 1)$  ou  $(1, -1)$  donne par exemple les mêmes efficacités.

## REFERENCES

- Abramowitz M., Stegun A. *et al.* (1970). Handbook of Mathematical Functions. *Dover Publications*, New York, 1046p.
- Addelman, S. (1962). Orthogonal main-effect plans for Asymmetrical factorial experiments. *Technometrics*, **4**, 21-46.
- Addelman S., Kempthorne O. (1961). Some main effect plans and orthogonal arrays of strength two. *Ann. Math. Stat*, **32**, 1167-1176.
- Agrawal V., Dey A. (1983). Orthogonal Resolution-IV Designs for Some Asymmetrical Factorials. *Technometrics*, **25**, n° 2, 197-199.
- ASU (1997). Plans d'expériences: applications à l'entreprise. *Eds: Dreesbeke, Fine, Saporita*. Technip, Paris. 509p.
- Bailey R.A. (1981). A Unified Approach to Design of Experiments. *J. Roy. Statist. Soc. A*, **144**, Part 2, 214-223.
- Bailey R.A. (1991). Strata for randomized experiments. *J. Roy. Statist. Soc. B*, **53**, 27-78.
- Bailey R.A. (1996). Statistics and Mathematics: The appropriate use of Mathematics within Statistics. Document interne, Queen Mary and Westfield College, Mile End Road, London E1 4NS.
- Billaux F. (1995). Essai de revivification d'*Escherichia coli* après réfrigération. SSHA, document interne.
- Bose R.C. (1938). On the application of the properties of Galois fields to the problem of construction of hyper-graeco-latin squares. *Sankhyā*, **3**, 323-338.
- Bose R.C. and Kishen K. (1940). On the problem of confounding in the general symmetrical factorial design. *Sankhyā*, **5**, 21-36.
- Bose R.C. (1947) Mathematical theory of the symmetrical factorial design, *Sankhya*, **8**, 107-166.
- Box G.E.P and Meyer R.D (1986). An analysis for unreplicated fractional factorials. *Technometrics*, **28**, n° 1, 11-18.
- Box G.E.P and Meyer R.D. (1993). Finding the active factors in fractionated screening experiments. *J. of Quality. Technology*, **25**, n° 2, 94-105.
- Box G.E.P and Hunter J.S. (1961). The  $2^{k-p}$  fractional factorial designs. *Technometrics*, **3**, 311-351 and 449-458.
- Brownlee K.A., Kelly P.K. and Loraine P.K. (1948). Fractional replication arrangements for factorial experiments with factors at two levels. *Biometrika*, **35**, 268-276.
- Burton R.C. and Connor W.S. (1957). On the identity relationship for fractional replicates of the  $2^n$  series. *Ann. Math. Statist.*, **28**, 762-767.

- Chacko A., Dey A. and Ramakrishna G.V.S. (1979). Orthogonal Main Effect Plans for Asymmetrical Factorials. *Technometrics*, **21**, 269-270.
- Chambers J.M. and Hastie T.J. (1993). Statistical Models in S. Chapman & Hall, 608p.
- Chen J. and Wu C.F.J. (1991). Some results on  $s^{n-k}$  fractional factorial designs with minimum aberration or optimal moments. *Ann. Statist.*, **19**, 1028-1041.
- Chen J. (1992). Some results on  $2^{n-k}$  fractional factorial designs and search for minimum aberration designs. *Ann. Statist.*, **20**, 2124-2141.
- Chen J., Sun D.X. and Wu C.J. (1993). A catalogue of two-level and three-level fractional factorial designs with small runs. *International Stat. Rev.*, **61**, 1, 131-145.
- Cheng C.S. and Bailey R.A. (1991). Optimality of some two-associate-class partially balanced incomplete-block designs. *Annals of Statist.*, **19**, 1667-1671.
- Cliquet S., Durier C., Kobilinsky A. (1994). Principle of a fractional factorial design for qualitative and quantitative factors: application to the production of *Bradyrhizobium japonicum* in culture media. *Agronomie*, **14**, 569-587.
- Cochran W.G. and Cox G. (1957). Experimental Designs. Wiley, New-York.
- Collombier D. (1989). Optimality of some fractional factorial designs. In: Y. Dodge, V.V. Fedorov and H.P. Wynn, Eds., *Optimal Design and Analysis of Experiments*. North-Holland, Amsterdam, 39-45.
- Collombier D. (1995). Plans d'expérience factoriels. Springer Verlag, *collection Mathématiques et applications*, **21**, Heidelberg, 194p.
- Connor W.S. and Young S. (1961). Factorial Fractional Designs with factors at two and three levels. *National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series*, **58**. (Reproduit dans McLean and Anderson [1984]).
- Daniel C. (1959). Use of half-normal plots in interpreting factorial two-level experiments. *Technometrics*, **1**, 311-341.
- David H.A. (1981). Order Statistics (2nde édition). *Wiley*. 360p.
- Dey A. (1985). Orthogonal Fractional Factorial Designs. *Wiley Eastern*, New Delhi, 133p.
- Dey A. and Ramakrishna G.V.S. (1977). A Note on Orthogonal Main-Effect Plans. *Technometrics*, **19**, 511-512.
- Diamond W.J. (1981). Practical experiment design for engineers and scientists. Lifetime Learning Publications, Belmont.
- Draper N.R. and Mitchell T.J. (1967). The construction of saturated  $2_R^{k-p}$  designs. *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1110-1126.
- Draper N.R. and Mitchell T.J. (1968). Construction of the set of 256-run designs of resolution  $\geq 5$  and the set of even 512-run designs of resolution  $\geq 6$  with special reference to the unique saturated designs. *Ann. Math. Statist.*, **39**, 246-255.

- Draper N.R. and Mitchell T.J. (1970). Construction of a set of 512-run designs of resolution  $\geq 5$  and a set of even 1024-run designs of resolution  $\geq 6$ . *Ann. Math. Statist.*, **41**, 876-887.
- DuMouchel W. and Jones B. (1994). A simple bayesian modification of  $D$ -optimal designs to reduce dependence on an assumed model. *Technometrics*, **36**, 37-47.
- Durier C. et Kobilinsky A. (1989). Apolor: une nouvelle vision de la régression polynomiale. *Actes XXI Jour. Stat- ASU*, 93-97. Finney D.J. (1945). The fractional replication of factorial arrangements. *Ann. Eugen. Lond.*, **12**, 291-301.
- Edmondson R.N. (1991). Agricultural response surface experiments based on four-level factorial designs. *Biometrics*, **47**, 1435-1448.
- Edmondson R.N. (1993). Systematic row-and-column designs balanced for low order polynomial interactions between rows and columns. *J.R. Statist. Soc. B*, **55**, 707-723.
- El Mossadeq A. and Kobilinsky A. (1992). Run orders and quantitative factors in asymmetrical designs. *Appl. Stochast. Models Data Anal.*, **8**, 259-281.
- Finney D.J. (1945). The fractional replication of factorial arrangements. *Ann. Eugen.*, **12**, 291-301.
- Fisher R.A. and Yates F. (1953). Statistical tables for biological, agricultural and medical research. Oliver and Boyd, London. (fourth edition).
- Franklin M.F. (1984). Constructing Tables of Minimum Aberration  $p^{n-m}$  Designs. *Technometrics*, **26**, 225-232.
- Franklin M.F. (1985). Selecting Defining Contrasts and Confounded Effects in  $p^{n-m}$  Factorial Experiments. *Technometrics*, **27**, No. 2, 165-172.
- Franklin M.F. and Bailey R.A. (1977). Selection of Defining Contrasts and Confounded Effects in Two-level Experiments. *Appl. Statist.* , **26**, No. 3, 321-326.
- Fries A. and Hunter W.G. (1980). Minimum aberration  $2^{k-p}$  designs. *Technometrics*, **22**, 601-608.
- GENSTAT 5 (1987). Procédures ANOVA et REML. Reference Manual. *Oxford Science Publications, Clarendon Press.*
- GENSTAT 5 (1997). Procédure FKEY. A paraître.
- Haaland P.D. and O'Connell L.A. (1995). Inference for Effect-Saturated Fractional Factorials. *Technometrics*, **37**, 82-93.
- Hedayat A. and Wallis W.D. (1978). Hadamard matrices and their applications. *Ann. Stat.*, **6**, 1184-1238.
- John J.A. (1987). Cyclic Designs. Chapman & Hall, London.
- John P.W.M (1971). Statistical Designs and analysis of experiments. Macmillan, New-York.

- Kobilinsky A. (1985a). Orthogonal factorial designs for quantitative factors. *Statistics and Decision, Suppl.*, **2**, 275-285.
- Kobilinsky A. (1985b). Confounding in relation to duality of finite abelian groups. *Linear Algebra Applic.* **70**, 321-347.
- Kobilinsky A. (1988). Tactiques en analyse de variance et en régression. *Rev. Modulad*, **1**, 25-58.
- Kobilinsky A. (1990). Complex linear models and cyclic designs. *Linear Algebra and Applications*, **127**, 227-282.
- Kobilinsky A. (1994). PLANOR: programme de génération automatique de plans d'expériences réguliers. Document interne, Labo. de Biométrie, INRA, Versailles.
- Kobilinsky A. (1996). Reparametrisation of interest in non uniform factorial designs. Document interne, Labo. de Biométrie, INRA, Versailles.
- Kobilinsky A., Fliss M., Carpentier B. (1995). Méthodes et exemples de construction de plans factoriels fractionnaires. Dans : Stratégie expérimentale et procédés biotechnologiques. Collection *Récents progrès en génie des procédés*, Vol 9, **36**, p19-28, Ed: GFGP, Diffuseur: Lavoisier.
- Kobilinsky A. and Monod H. (1991). Experimental design generated by group morphisms: an introduction. *Scand. J. Statist.*, **18**, 119-134.
- Kobilinsky A. and Monod H. (1995). Juxtaposition of regular factorial designs and the complex linear model. *Scand. J. Statist* **22**, n° 2, 223-254.
- Kiefer J. (1975). Construction and Optimality of Generalized Youden Designs. In *A survey of Statistical Designs and Linear Models*, (J.N. Srivastava, Ed.), North Holland, 333-365.
- Laycock P.J. and Rowley P.J. (1995). A method for generating and labelling all regular fractions or blocks for  $q^{n-m}$  designs. *J. Roy. Statist. Soc. B*, **57**, N0 1, 191-204.
- Lenth R.V. (1989). Quick and Easy Analysis of Unreplicated Factorials. *Technometrics*, **31**, 469-473.
- Lin K.J. (1995). Generating Systematic Supersaturated Designs. *Technometrics*, **37**, n0 2, 213-225.
- Margolin B.H. (1969). Resolution IV Fractional Factorial Designs. *J. Roy. Statist.Soc. Ser. B*, **31**, 514-523.
- McLean R.A. and Anderson V.L. (1984). Applied factorial and fractional designs. Marcel Dekker, New-York, 373p.
- Monod H. and Kobilinsky A. (1994). Using the complex linear model to search for an optimal juxtaposition of regular fractions. *Proceedings LINSTAT 93*, T. Calinski and R. Kala Eds. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 229-237.
- Mukerjee R. (1982). Universal optimality of fractional factorial plans derivable through

- orthogonal arrays, *Calcutta Statist. Assoc. Bull*, **31**, 63-68.
- National Bureau of Standards (1957). Fractional Factorial Experiment Designs for Factors at Two Levels. Applied Mathematics Series. **48**. (Reproduit dans McLean and Anderson, 1984).
- Patterson H.D. and Bailey R.A. (1978). Design keys for factorial experiments. *Appl. Statist.*, **27**, 335-343.
- Plackett R.L. and Burman J.P. (1946). The design of multifactorial experiments. *Biometrika*, **33**, 305-325.
- SAS Institute, Inc. (1989). SAS/QC Software. The FACTEX Procedure. Reference Version 6, First Edition. SAS Institute Inc., Cary, NC, USA.
- Sun D.X., Wu C.F.J. and Chen Y.Y. (1995). Optimal Blocking Schemes for  $2^n$  and  $2^{n-p}$  designs. Article diffusé par Internet, adresse : <http://netlib.att.com/stat/doc>, file 95.14.ps.
- Tippett (1934). Applications of statistical methods to the control of quality in industrial production. *Journal of the Manchester Statistical Society*.
- Tjur T. (1984). Analysis of variance models in orthogonal designs (with discussion). *Internat. Statist. Rev.*, **52**, 33-65.
- Wu C.F.J. (1989). Construction of  $2^m 4^n$  designs via a grouping scheme. *Ann. Stat.*, **17**, 1880-1885.
- Wu C.F.J. and Zhang R. (1993). Minimum aberration designs with tow-level and four-level factors. *Biometrika*, **80**, 203-209.
- Zemroch, P.J. (1992). KEYFINDER - A complete toolkit for generating fractional-replicate and blocked factorial designs. In Dodge Y. and J. Whittaker (eds). Computational Statistics Vol 2, 263-268. Physica-Verlag.

# Table des matières

<b>3</b>	<b>Les plans factoriels</b>	<b>2</b>
3.1	Introduction . . . . .	2
3.2	Introduction aux fractions régulières . . . . .	3
3.2.1	Construction d'une fraction $1/2$ d'un $2^3$ . . . . .	3
3.2.2	Effets factoriels . . . . .	4
3.2.3	Confusion d'effets . . . . .	9
3.2.4	Analyse : estimation, tests, intervalles de confiance . . . . .	11
3.2.5	Analyse : une approche plus empirique . . . . .	12
3.2.6	La fraction $1/2$ complémentaire . . . . .	13
3.2.7	Fraction $1/4$ d'un $2^6$ . . . . .	14
3.3	Détection des effets actifs dans un plan sans répétition . . . . .	18
3.3.1	Le graphique des quantiles demi-normaux . . . . .	18
3.3.2	Tests complétant le graphique des quantiles . . . . .	20
3.3.3	Détection Bayésienne des facteurs actifs . . . . .	20
3.3.4	Exemple de la revivification des bactéries . . . . .	22
3.4	Complément sur les fractions régulières . . . . .	28
3.4.1	Fraction $1/4$ parallèles d'un $2^6$ . . . . .	28
3.4.2	Fraction $1/3$ d'un $3^4$ en trois blocs . . . . .	29
3.4.3	Randomisation d'un plan en blocs . . . . .	33
3.5	Plans de résolution 3, 4, 5 . . . . .	35
3.5.1	Résolution d'une fraction . . . . .	35
3.5.2	Majoration du nombre de facteurs dans le cas général . . . . .	38
3.5.3	Majoration du nombre de facteurs pour des facteurs à deux niveaux	40
3.5.4	Majoration du nombre de facteurs pour des facteurs à trois niveaux	42
3.6	Plans réguliers adaptés à des modèles plus particuliers . . . . .	45
3.6.1	Obtention et comparaison des fractions $2^{h-m}$ de résolution donnée .	45
3.6.2	Notations matricielles des relations de définition . . . . .	52
3.6.3	Equivalence entre fractions . . . . .	57

3.6.4	Matrice génératrice et longueurs des mots de définition . . . . .	60
3.6.5	Les différents types de fraction $2^{8-3}$ . . . . .	64
3.7	Répartition en blocs d'une fraction régulière . . . . .	69
3.7.1	Répartition en blocs de la fraction $2^{8-3}$ de profil $4_35_4$ . . . . .	69
3.7.2	Répartition en blocs d'une fraction $2^{11-5}$ . . . . .	74
3.8	Plans asymétriques pour facteurs qualitatifs à 2 et 4 niveaux . . . . .	76
3.8.1	Nombre maximum de facteurs à 4 et 2 niveaux en résolution 3, 4, 5	81
3.8.2	Plan de résolution 3, repliable en plan de résolution 4 . . . . .	87
3.9	Passage de 4 à 3 niveaux par agrégation de niveaux . . . . .	88
3.10	Variances et efficacités factorielles . . . . .	95
3.10.1	Efficacité factorielle pour un contraste . . . . .	95
3.10.2	Efficacité factorielle globale pour un effet . . . . .	96
3.10.3	Paramétrisation orthogonale pour le plan de référence . . . . .	101
3.10.4	Techniques matricielles de calcul . . . . .	108
3.10.5	Recherche matricielle des confusions d'effets . . . . .	109
3.11	Génération automatique de fractions régulières . . . . .	111
3.12	Plans asymétriques pour facteurs quantitatifs ou qualitatifs à 2 et 4 niveaux	115
3.12.1	Facteurs quantitatifs et effets polynomiaux . . . . .	115
3.12.2	Relations entres effets polynomiaux et pseudofactoriels . . . . .	117
3.12.3	Plans réguliers orthogonaux pour le modèle polynomial . . . . .	119
3.12.4	Plans réguliers non orthogonaux pour le modèle polynomial . . . . .	120
3.13	Juxtaposition de plans réguliers . . . . .	124
3.13.1	Introduction . . . . .	124
3.13.2	Répliques du lattice $5 \times 5$ . . . . .	126
3.13.3	Les $3/4$ de plan . . . . .	127

## Table des figures

3.1	Représentation de l'interaction $AB$ dans trois cas de figure . . . . .	6
3.2	Graphiques des quantiles demi-normaux avec les effets (3.25) . . . . .	21

3.3	Revivification : graphique de Daniel . . . . .	24
-----	--	----

## Liste des tableaux

3.1	Fraction 1/2 d'un $2^3$ . . . . .	4
3.2	Matrice $Z$ définissant les effets factoriels . . . . .	8
3.3	Matrice $X$ du modèle linéaire pour la fraction 1/2 . . . . .	10
3.4	Fraction 1/2 complémentaire du $2^3$ . . . . .	13
3.5	Matrice $X$ pour la fraction 1/2 définie par $C = -AB$ . . . . .	13
3.6	Fraction 1/4 d'un $2^6$ . . . . .	15
3.7	Egalités entre produits de facteurs dans une fraction 1/4 d'un $2^6$ . . . . .	15
3.8	f.e.b en l'absence d'interactions de 3 facteurs ou plus . . . . .	17
3.9	Coefficient $t_\alpha$ en fonction du nombre $d$ de ddl de l'erreur . . . . .	18
3.10	Revivification de bactéries : les facteurs et leurs niveaux . . . . .	23
3.11	Revivification : définition et propriété de la fraction $2^{9-4}$ . . . . .	23
3.12	Revivification : plan, observation, f.e.b et quantiles . . . . .	25
3.13	Revivification : Détermination bayésienne d'un modèle . . . . .	27
3.14	Revivification : analyse de variance avec les seuls facteurs actifs . . . . .	28
3.15	Un plan régulier pour 4 facteurs à 3 niveaux sur 3 blocs de 9 unités . . . . .	30
3.16	Effets confondus dans la fraction 1/3 d'un $3^4$ en 3 blocs . . . . .	34
3.17	Randomisation d'un plan en bloc . . . . .	34
3.18	Création fraction de rés. 4 par repliement d'une fraction de rés. 3 . . . . .	41
3.19	Nb. maxi. de facteurs dans une fraction de taille $2^8$ , résolution 5 . . . . .	42
3.20	Plan $3^{13-10}$ de résolution 3 . . . . .	43
3.21	Nb. maxi. de facteurs dans fraction de taille $3^8$ , résolution 5 . . . . .	44
3.22	Fractions $2^{7-2}$ régulières de résolution 4 . . . . .	45
3.23	Fractions $2^{7-2}$ générées en plus de celle du tableau 3.22 . . . . .	46
3.24	Comparaison de deux fractions $2^{9-4}$ régulières de résolution 4 . . . . .	48
3.25	Nombre minimum d'interactions confondues en résolution 4 . . . . .	50
3.26	Fractions $2^{11-5}$ de résolution 4 privilégiant les 3 facteurs $A, B, C$ . . . . .	51

3.27	Génération des fractions principales $2^{6-2}$ . . . . .	54
3.28	Matrice génératrice des effets confondus avec la moyenne . . . . .	56
3.29	Recherche d'équivalence entre deux fractions . . . . .	58
3.30	Test d'équivalence entre fractions . . . . .	59
3.31	Equivalence des fractions ayant une même matrice génératrice . . . . .	60
3.32	Définition d'une matrice génératrice par le vecteur de fréquence des colonnes	60
3.33	Relation entre le vecteur des fréquences et les longueurs de mots . . . . .	61
3.34	Recherche de fractions $2^{8-3}$ régulières de résolution 4 . . . . .	65
3.35	Recherche d'équivalence entre deux fractions . . . . .	66
3.36	Validité des choix $\pi F = B$ , $\pi G = A$ . . . . .	66
3.37	Equivalence entre deux fractions $2^{8-3}$ . . . . .	67
3.38	Effets confondus dans les fractions $2^{8-3}$ de résolution 4 . . . . .	68
3.39	Fraction $2^{8-3}$ de profil $4_3 5_4$ en 8 blocs . . . . .	70
3.40	Egalités impliquant les effets blocs dans la fraction $2^{8-3}$ . . . . .	71
3.41	f.e.b dans la fraction $2^{8-3}$ en 8 blocs . . . . .	71
3.42	Fraction régulière $2^{8-3}$ , de résolution 4, en 16 blocs . . . . .	73
3.43	Répartition en 16 blocs d'une fraction $2^{11-5}$ . . . . .	75
3.44	Décomposition en pseudofacteurs d'un facteur à 4 niveaux . . . . .	76
3.45	Permutations équivalentes des effets d'un facteur à 4 niveaux . . . . .	78
3.46	Les fractions régulières $4^2 2^4 / 4$ de résolution 4 . . . . .	79
3.47	Confusions dans une fraction $4^2 2^4 / 4$ en 8 blocs . . . . .	80
3.48	La fraction régulière $4^2 2^4 / 8$ de résolution 4 . . . . .	81
3.49	Correspondance entre fractions $2^{8-2}$ et fractions $4^2 2^4 / 4$ . . . . .	81
3.50	Deux fractions régulières saturées $4 \times 2^7 / 16$ de résolution 4 . . . . .	85
3.51	Sup. de $h_2$ pour fraction régulière d'un $4^{h_4} 2^{h_2}$ , résolution 4, taille $N$ . . . .	86
3.52	Sup. de $h_2$ pour fraction régulière d'un $4^{h_4} 2^{h_2}$ , résolution 5, taille $N$ . . . .	87
3.53	Plan $4^1 2^6 / 16$ de résolution 3 repliable en plan de résolution 4 . . . . .	88
3.54	Création d'une fraction d'un $3^1 2^2$ à partir d'une fraction $4^1 2^2 / 2$ . . . . .	89
3.55	Expression des effets factoriels après agrégation . . . . .	90
3.56	Agrégation niveaux $(-1, -1)$ , $(-1, 1)$ d'un $4^1 2^2 / 2$ conduisant à $f_2$ . . . . .	92

3.57	Les deux fractions régulières $4 \times 2^6/8$ de résolution 4 . . . . .	93
3.58	5 fractions de taille 8 d'un $3^1 2^2$ . . . . .	98
3.59	Matrices de variance normalisées $NV/\sigma^2$ du vecteur $\hat{\theta}$ des effets de $A$ . . .	98
3.60	Efficacités factorielles pour fractions d'un $3^1 2^2$ , modèle additif . . . . .	98
3.61	Matrices $X$ pour $f_4, f_5$ avec l'interaction $BC$ . . . . .	100
3.62	Efficacités factorielles de fractions d'un $3^1 2^2$ , sans $AC$ , cas pondéré . . . . .	101
3.63	Bases orthonormées de $\mathbb{R}^{T_1}$ pour deux plans de référence . . . . .	106
3.64	Une base orthogonale de $L^2(\pi_j)$ dans le cas pondéré . . . . .	107
3.65	Base des caractères des groupes cycliques d'ordre 2, 3, 4 . . . . .	108
3.66	Base orthonormée de $\mathbb{R}^8$ utilisée pour définir les effets blocs . . . . .	111
3.67	Confusions d'effets avec deux paramétrisations distinctes $P_1, P_2$ . . . . .	111
3.68	Polynômes orthogonaux et pseudofacteurs pour un facteur à 4 niveaux . . . . .	117
3.69	Relations entre effets polynomiaux et pseudofactoriels . . . . .	118
3.70	Expression des effets pseudofactoriels dans un modèle de degré 2 . . . . .	121
3.71	Estimations des effets polynomiaux dans la fraction $4^2/2$ . . . . .	122
3.72	Estimations des moindres carrés des effets linéaires dans la fraction $4^2/2$ . . . . .	123
3.73	Efficacités globales pour les 6 solutions, exemple 3.9 . . . . .	124
3.74	Efficacités pour les 3 meilleures solutions pour la trace, exemple 3.9 . . . . .	125
3.75	Efficacité dans les $3/4$ de plan de John . . . . .	127