

Solutions pour la partie 4

PLAN FRACTIONNAIRE REGULIER 2^{3-1}

Ex: 3 facteurs A, B, C à 2 niveaux codés 1, -1
4 unités expérimentales

	1	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	ABC = -1	
$\tau(-1, -1, 1)$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1		
$\tau(-1, -1, -1)$	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	*	$\rightarrow y(-1, -1, -1)$
$\tau(-1, 1, 1)$	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	*	$\rightarrow y(-1, 1, 1)$
$\tau(-1, 1, -1)$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1		
$\tau(1, -1, 1)$	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	*	$\rightarrow y(1, -1, 1)$
$\tau(1, -1, -1)$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1		
$\tau(1, 1, 1)$	1	1	1	1	1	1	1	1		
$\tau(1, 1, -1)$	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	*	$\rightarrow y(1, 1, -1)$
	$e(1)$	$e(A)$	$e(B)$	$e(C)$	$e(AB)$	$e(AC)$	$e(BC)$	$e(ABC)$		effets factoriels

Fraction définie par $ABC = -1$. On a

$$ABC = -1, \quad BC = -A, \quad AC = -B, \quad C = -AB \quad \text{et}$$

$$\tau(A, B, C) = e(1) + ABC e(ABC) + A e(A) + BC e(BC) + B e(B) + AC e(AC) + C e(C) + AB e(AB)$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} \tau(A, B, C) = & \underbrace{[e(1) - e(ABC)]}_{\gamma(1)} + A \underbrace{[e(A) - e(BC)]}_{\gamma(A)} \\ & + B \underbrace{[e(B) - e(AC)]}_{\gamma(B)} + AB \underbrace{[e(AB) - e(C)]}_{\gamma(AB)} \end{aligned}$$

Sur la fraction

$$\tau(A,B,C) = \gamma(\mathbf{1}) + A \gamma(A) + B \gamma(B) + AB \gamma(AB)$$

$$\tau(-1, -1, -1) = \gamma(\mathbf{1}) - \gamma(A) - \gamma(B) - \gamma(AB)$$

$$\tau(-1, 1, 1) = \gamma(\mathbf{1}) - \gamma(A) + \gamma(B) + \gamma(AB)$$

$$\tau(1, -1, 1) = \gamma(\mathbf{1}) + \gamma(A) - \gamma(B) + \gamma(AB)$$

$$\tau(1, 1, -1) = \gamma(\mathbf{1}) + \gamma(A) + \gamma(B) - \gamma(AB)$$

$$\begin{bmatrix} \tau(-1, -1, -1) \\ \tau(-1, 1, 1) \\ \tau(1, -1, 1) \\ \tau(1, 1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{1}) \\ \gamma(A) \\ \gamma(B) \\ \gamma(AB) \end{bmatrix}$$

$$\tau_0 = Z \gamma$$

$$\begin{bmatrix} y(-1, -1, -1) \\ y(-1, 1, 1) \\ y(1, -1, 1) \\ y(1, 1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{1}) \\ \gamma(A) \\ \gamma(B) \\ \gamma(AB) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon(-1, -1, -1) \\ \varepsilon(-1, 1, 1) \\ \varepsilon(1, -1, 1) \\ \varepsilon(1, 1, -1) \end{bmatrix}$$

$$y = \mathbf{1} \ A \ B \ AB \quad \varepsilon$$

$$y = Z\gamma + \varepsilon.$$

Or Z vérifie

$$Z'Z = ZZ' = 4\mathbf{I},$$

donc

$$\gamma = \frac{1}{4}Z'\tau_0 \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{4}Z'y$$

ce qui s'écrit aussi

$$\hat{\gamma}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}'y/4 = \langle y, \mathbf{1} \rangle / 4 = [y(-1, -1, -1) + y(-1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + y(1, 1, -1)] / 4$$

$$\hat{\gamma}(A) = A'y/4 = \langle y, A \rangle / 4 = [-y(-1, -1, -1) - y(-1, 1, 1) + y(1, -1, 1) + y(1, 1, -1)] / 4$$

$$\hat{\gamma}(B) = B'y/4 = \langle y, B \rangle / 4 = [-y(-1, -1, -1) + y(-1, 1, 1) - y(1, -1, 1) + y(1, 1, -1)] / 4$$

$$\hat{\gamma}(AB) = (AB)'y/4 = \langle y, AB \rangle / 4 = [y(-1, -1, -1) - y(-1, 1, 1) - y(1, -1, 1) + y(1, 1, -1)] / 4$$

f.e.b: $\gamma(\mathbf{1}) = e(\mathbf{1}) - e(ABC), \quad \gamma(A) = e(A) - e(BC)$
 $\gamma(B) = e(B) - e(AC), \quad \gamma(AB) = e(AB) - e(C)$

$$\begin{array}{l}
\text{var}(y(A,B,C)) = \sigma^2 \\
\text{Observations} \\
\text{indépendantes}
\end{array}
\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{var}(y(A,B,C)) = \sigma^2 \\ \text{Observations} \\ \text{indépendantes} \end{array}} \right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
\text{var}(\hat{\gamma}(\mathbf{1})) = \sigma^2/4 \\
\text{var}(\hat{\gamma}(A)) = \sigma^2/4 \\
\text{var}(\hat{\gamma}(B)) = \sigma^2/4 \\
\text{var}(\hat{\gamma}(AB)) = \sigma^2/4 \\
\text{cov}(\hat{\gamma}(\mathbf{1}), \hat{\gamma}(A)) = 0 \\
\cdots \\
\text{cov}(\hat{\gamma}(A), \hat{\gamma}(AB)) = 0
\end{array}$$

$e(\mathbf{1})$ confondu avec $e(ABC)$

Terminologie : $e(A)$ confondu avec $e(BC)$

...

- $\gamma(\mathbf{1}), \gamma(A), \gamma(B), \gamma(AB)$ estimés orthogonalement

avec variance σ^2/N ($N = 4$)

$e(\mathbf{1})$ estimable si $e(ABC) = 0$

- $e(A)$ estimable si $e(BC) = 0$
- $e(B)$ estimable si $e(AC) = 0$
- $e(C)$ estimable si $e(AB) = 0$

Construction :	A	B	$C = -AB$
	-1	-1	-1
	-1	1	1
	1	-1	1
	1	1	-1

A, B : facteurs de base

Dans ce cas, on peut également prendre comme facteurs de base soit le couple (A, C) , soit le couple (B, C) .

FRACTION 2^{6-2}

Ex: 6 facteurs A, B, C, D, E, F à 2 niveaux codés 1, -1
16 unités expérimentales

facteurs de base: A, B, C, D

facteurs définis: $E = ABC, \quad F = -BCD.$

$$\begin{aligned} E = ABC &\longrightarrow ABCE = 1 \\ F = -BCD &\longrightarrow -BCDF = 1 \\ &\qquad\qquad\qquad -ADEF = 1 \end{aligned}$$

Relations (mots, produits, contrastes) **de définition.**

$$1 = ABCE = -BCDF = -ADEF$$

Egalités engendrées (effets confondus)

$$A = BCE = -ABCDF = -DEF$$

$$AB = CE = -ACDF = -BDEF$$

...

$$ABCD = DE = -AF = -BCEF$$

$$\gamma(\mathbf{1}) = e(\mathbf{1}) + e(ABCE) - e(BCDF) - e(ADEF),$$

$$\gamma(A) = e(A) + e(BCE) - e(ABCDF) - e(DEF),$$

$$\gamma(AB) = e(AB) + e(CE) - e(ACDF) - e(BDEF),$$

...

$$\gamma(ABCD) = e(ABCD) + e(DE) - e(AF) - e(BCEF),$$

$$\begin{array}{ll}
\hat{\gamma}(\mathbf{1}) & = \langle \mathbf{y}, \mathbf{1} \rangle / 16 & \text{var}(\hat{\gamma}(\mathbf{1})) & = \sigma^2 / 16 \\
\hat{\gamma}(A) & = \langle \mathbf{y}, A \rangle / 16 & \text{var}(\hat{\gamma}(A)) & = \sigma^2 / 16 \\
\hat{\gamma}(AB) & = \langle \mathbf{y}, AB \rangle / 16 & \text{var}(\hat{\gamma}(AB)) & = \sigma^2 / 16 \\
& \dots & & \\
\hat{\gamma}(ABCD) & = \langle \mathbf{y}, ABCD \rangle / 16 & \text{cov}(\hat{\gamma}(\mathbf{1}), \hat{\gamma}(AB)) & = 0 \\
& & \dots & \\
& & & \dots
\end{array}$$

$E = A + B + C \pmod{2}$					
$F = 1 + B + C + D \pmod{2}$					
A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0

notation additive

$E = ABC$					
$F = -BCD$					
A	B	C	D	E	F
1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	1	1
1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1
-1	1	1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	1
-1	1	-1	1	1	1
-1	1	-1	-1	1	-1
-1	-1	1	1	1	1
-1	-1	1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	1

notation multiplicative

TAB. 4.1 – Fraction 1/4 d'un 2^6

mot déf.	couples de lettres dans les mots de définition					
<i>ABCE</i>	<i>AB</i>	<i>CE</i>	<i>AC</i>	<i>BE</i>	<i>AE</i>	<i>BC</i>
<i>BCDF</i>	<i>BC DF BD CF BF CD</i>					
<i>ADEF</i>	<i>AE</i>		<i>DF</i>		<i>AD EF AF DE</i>	

TAB. 4.2 – *Paires de lettres dans les mots de définition*

Il y a 6 paires de lettres dans chaque mot de définition,
mais certaines paires apparaissent dans deux mots