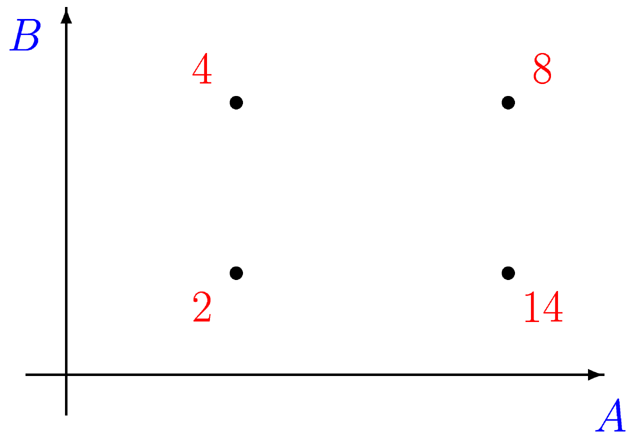
Effets principaux, interactions

température A
pH B $\Bigg] \longrightarrow$ taux de croissance y

Réponses
supposées connues



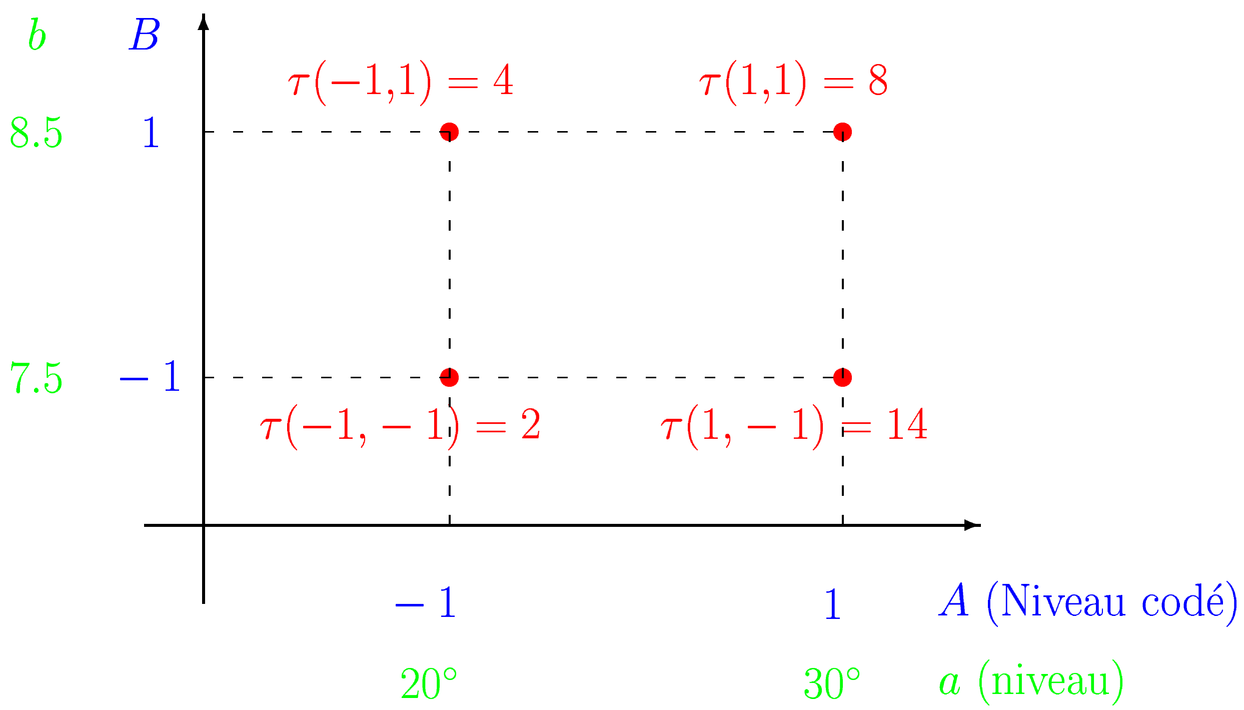
$$\text{moyenne générale} \qquad e(\mathbf{1}) = 7 = \frac{2+4+14+8}{4}$$

$$\text{effet de } A \qquad e(A) = 4 = \frac{11-3}{2}$$

$$\text{effet de } B \qquad e(B) = -1 = \frac{6-8}{2}$$

$$\text{interaction } A.B \qquad e(AB) = -2 = \frac{2-6}{2}$$

➤ Réponses théoriques $\tau(A,B)$ supposées connues



$$\text{moyenne générale} \;:\; e(\mathbf{1}) = \frac{\tau(-1,-1)+\tau(-1,1)+\tau(1,-1)+\tau(1,1)}{4}$$

$$\text{effet principal } A \;:\; e(A) = \frac{-\tau(-1,-1)-\tau(-1,1)+\tau(1,-1)+\tau(1,1)}{4}$$

$$\text{effet principal } B \;:\; e(B) = \frac{-\tau(-1,-1)+\tau(-1,1)-\tau(1,-1)+\tau(1,1)}{4}$$

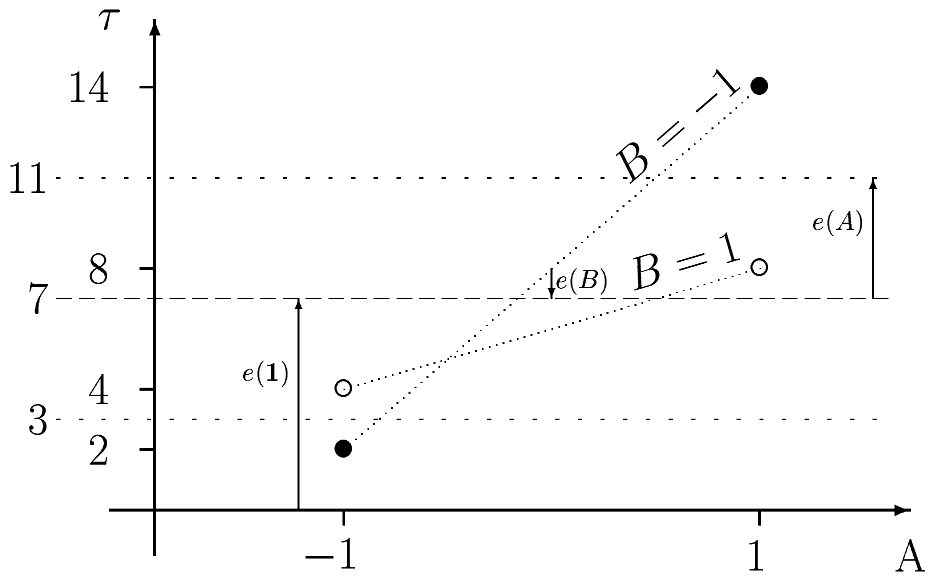
$$\text{interaction } A.B \;:\; e(AB) = \frac{\tau(-1,-1)-\tau(-1,1)-\tau(1,-1)+\tau(1,1)}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\tau(A,B) = e(\mathbf{1}) + A\; e(A) + B\; e(B) + AB\; e(AB)$$

$$\begin{aligned}
\tau(-1,-1) &= e(\mathbf{1}) - e(A) - e(B) + e(AB),\\
\tau(-1,\ 1) &= e(\mathbf{1}) - e(A) + e(B) - e(AB),\\
\tau(\ 1,-1) &= e(\mathbf{1}) + e(A) - e(B) - e(AB),\\
\tau(\ 1,\ 1) &= e(\mathbf{1}) + e(A) + e(B) + e(AB).
\end{aligned}$$

Effets factoriels



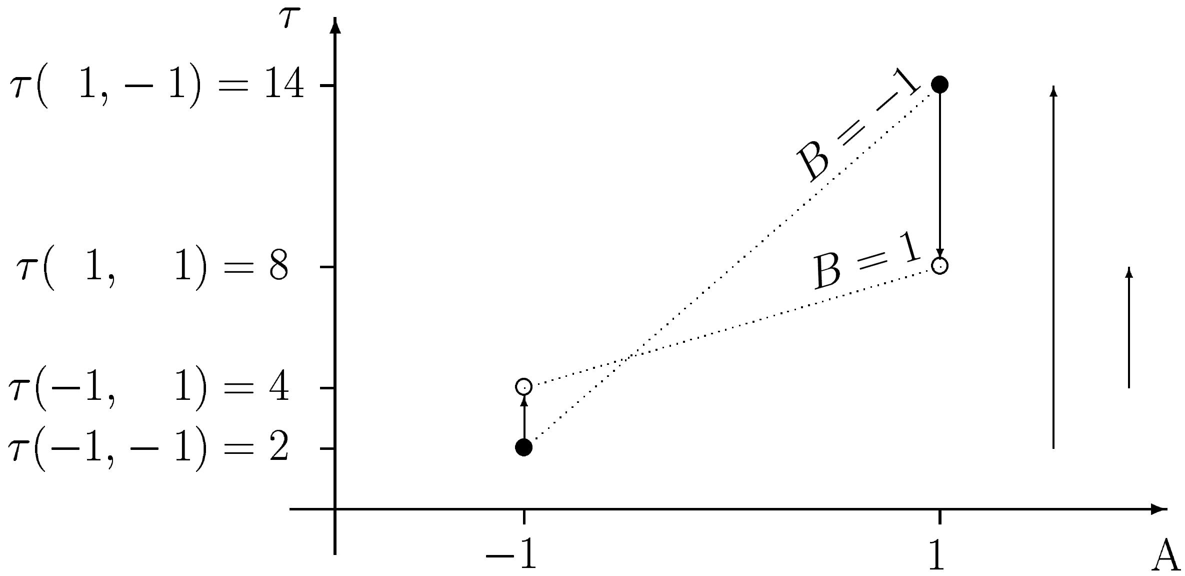
moyenne générale :

$$
\begin{aligned}
e(\mathbf{1}) &= \frac{\tau(-1,-1)+\tau(-1,1)+\tau(1,-1)+\tau(1,1)}{4} \\
&= \frac{2 \quad + \quad 4 \quad + \quad 14 \quad + \quad 8}{4} = 7
\end{aligned}
$$

effet principal de A :

$$
\begin{aligned}
e(A) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\tau(1,-1)+\tau(1,1)}{2} - \frac{\tau(-1,-1)+\tau(-1,1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{14 \quad + \quad 8}{2} - \frac{2 \quad + \quad 4}{2}\right] = 4
\end{aligned}
$$

Interaction $e(AB)$



interaction $A.B$:

$$
\begin{aligned}
e(AB) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\tau(1,1)-\tau(-1,1)}{2} - \frac{\tau(1,-1)-\tau(-1,-1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{8 - 4}{2} - \frac{14 - 2}{2}\right] = -2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\tau(1,1)-\tau(1,-1)}{2} - \frac{\tau(-1,1)-\tau(-1,-1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{8 - 14}{2} - \frac{4 - 2}{2}\right]
\end{aligned}
$$

effet principal de B :

$$
\begin{aligned}
e(B) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\tau(-1,1)+\tau(1,1)}{2} - \frac{\tau(-1,-1)+\tau(1,-1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{4 + 8}{2} - \frac{2 + 14}{2}\right] = -1
\end{aligned}
$$

Relation entre effets factoriels et réponses théoriques.

$$\begin{array}{cccccc}
& e' = & [e(\mathbf{1}) & e(A) & e(B) & e(AB)] \\
\tau(& A \quad B) & \mathbf{1} & A & B & AB \\
\tau(& -1, \ -1) & 1 & -1 & -1 & 1 \\
\tau(& -1, \quad 1) & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\tau(& 1, \ -1) & 1 & 1 & -1 & -1 \\
\tau(& 1, \quad 1) & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\tau} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{Z}$$

Lecture : pour obtenir l'effet factoriel en haut d'une colonne, multiplier les coefficients de la colonne par les réponses théoriques à gauche, sommer et diviser par 4.

Ecriture matricielle définissant les effets factoriels en fonction des réponses théoriques

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e(\mathbf{1}) \\ e(A) \\ e(B) \\ e(AB) \end{bmatrix}}_{e} = \underbrace{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\frac{1}{4}Z'} \underbrace{\begin{bmatrix} \tau(-1,-1) \\ \tau(-1,\ \ 1) \\ \tau(\ \ 1,-1) \\ \tau(\ \ 1,\ \ 1) \end{bmatrix}}_{\tau}$$

Z vérifie $$Z'Z = ZZ' = 4\,\mathbf{I}$$

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} Z$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{Z'} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Z : matrice d'**Hadamard**

$$e = \frac{1}{4} Z' \tau \Longrightarrow Ze = \frac{1}{4} Z Z' \tau = \tau$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tau(-1,-1) \\ \tau(-1,\ \ 1) \\ \tau(\ \ 1,-1) \\ \tau(\ \ 1,\ \ 1) \end{bmatrix}}_{\tau} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{Z} \underbrace{\begin{bmatrix} e(\mathbf{1}) \\ e(A) \\ e(B) \\ e(AB) \end{bmatrix}}_{e}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrrcllll}
\tau(& A, & B) & = & e(\mathbf{1}) & +Ae(A) & +Be(B) & +ABe(AB) \\
\tau(& -1, & -1) & = & e(\mathbf{1}) & -e(A) & -e(B) & +e(AB) \\
\tau(& -1, & 1) & = & e(\mathbf{1}) & -e(A) & +e(B) & -e(AB) \\
\tau(& 1, & -1) & = & e(\mathbf{1}) & +e(A) & -e(B) & -e(AB) \\
\tau(& 1, & 1) & = & e(\mathbf{1}) & +e(A) & +e(B) & +e(AB)
\end{array}$$

Etude expérimentale

➤ Pas de répétitions. σ non estimable.

$$\begin{array}{lcccl}
y_{-1,-1} & = & \tau(-1,-1) & + & \varepsilon_{-1,-1} \\
y_{-1,\ 1} & = & \tau(-1,\ \ 1) & + & \varepsilon_{-1,\ 1} \\
y_{\ 1,-1} & = & \tau(\ 1,-1) & + & \varepsilon_{\ 1,-1} \\
y_{\ 1,\ 1} & = & \tau(\ 1,\ \ 1) & + & \varepsilon_{\ 1,\ 1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lclcl}
y & = & \tau & + & \varepsilon \\
 & = & Ze & + & \varepsilon
\end{array}$$

Moindre carrés : $\hat{e} = (Z'Z)^{-1}Z'y = \dfrac{1}{4}Z'y \qquad \left(e = \dfrac{1}{4}Z'\tau\right)$

Pour estimer $\hat{e}$, on remplace les réponses théoriques $\tau(A,B)$
par les réponses observées y_{AB}

Si $\mathrm{var}(y) = \sigma^2 \mathbf{I}$,

$$\mathrm{var}(\hat{e}) = \sigma^2 (Z'Z)^{-1} = \frac{\sigma^2}{4}\mathbf{I}$$

$$\text{écart-type de } \hat{e}(\mathbf{1}), \hat{e}(A), \hat{e}(B), \hat{e}(AB) : \qquad \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4}}$$

$y \sim \mathcal{N}\left(\tau, \sigma^2 \mathbf{I}\right)$
σ connu

on peut obtenir des intervalles de confiance et tester la nullité des effets factoriels.

$$\frac{\hat{e}(A) - e(A)}{\sigma/2} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\hat{e}(A) - 1.96\,\frac{\sigma}{2} \leq e(A) \leq \hat{e}(A) + 1.96\,\frac{\sigma}{2} \quad \text{(seuil 5\%)}$$

➤ Traitements répétés deux fois. σ estimable.

$$\begin{array}{lcl} y_{-1,-1,1} & = & \tau(-1,-1) + \varepsilon_{-1,-1,1} \\ y_{-1,-1,2} & = & \tau(-1,-1) + \varepsilon_{-1,-1,2} \\ y_{-1,\ 1,1} & = & \tau(-1,\ 1) + \varepsilon_{-1,\ 1,1} \\ y_{-1,\ 1,2} & = & \tau(-1,\ 1) + \varepsilon_{-1,\ 1,2} \\ y_{\ 1,-1,1} & = & \tau(\ 1,-1) + \varepsilon_{\ 1,-1,1} \\ y_{\ 1,-1,2} & = & \tau(\ 1,-1) + \varepsilon_{\ 1,-1,2} \\ y_{\ 1,\ 1,1} & = & \tau(\ 1,\ 1) + \varepsilon_{\ 1,\ 1,1} \\ y_{\ 1,\ 1,2} & = & \tau(\ 1,\ 1) + \varepsilon_{\ 1,\ 1,2} \end{array}$$

Matriciellement

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{-1,-1,1} \\ y_{-1,-1,2} \\ y_{-1,\ 1,1} \\ y_{-1,\ 1,2} \\ y_{\ 1,-1,1} \\ y_{\ 1,-1,2} \\ y_{\ 1,\ 1,1} \\ y_{\ 1,\ 1,2} \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{Z_2} \underbrace{\begin{bmatrix} e(\mathbf{1}) \\ e(A) \\ e(B) \\ e(AB) \end{bmatrix}}_{e} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{-1,-1,1} \\ \varepsilon_{-1,-1,2} \\ \varepsilon_{-1,\ 1,1} \\ \varepsilon_{-1,\ 1,2} \\ \varepsilon_{\ 1,-1,1} \\ \varepsilon_{\ 1,-1,2} \\ \varepsilon_{\ 1,\ 1,1} \\ \varepsilon_{\ 1,\ 1,2} \end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

Z_2 est obtenu en doublant chaque ligne de Z et vérifie

$$Z_2' Z_2 = 8\,\mathbf{I}$$

$$\text{Moindre carrés :} \qquad \hat{e} = (Z_2' Z_2)^{-1} Z_2' y = \frac{1}{8} Z_2' y$$

☛ Pour estimer $\hat{e}$, on remplace dans les définitions les réponses théoriques $\tau(A,B)$ par les moyennes correspondantes y_{AB}.

$$\frac{1}{8}\underbrace{\begin{bmatrix} y_{-1,-1,1} \\ y_{-1,-1,2} \\ y_{-1,\ \ 1,1} \\ y_{-1,\ \ 1,2} \\ y_{\ \ 1,-1,1} \\ y_{\ \ 1,-1,2} \\ y_{\ \ 1,\ \ 1,1} \\ y_{\ \ 1,\ \ 1,2} \end{bmatrix}}_{y}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{Z_2} \qquad \frac{1}{4}\underbrace{\begin{bmatrix} y_{-1,-1,.} \\ y_{-1,\ \ 1,.} \\ y_{\ \ 1,-1,.} \\ y_{\ \ 1,\ \ 1,.} \end{bmatrix}}_{m}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{Z}$$

Si $\mathrm{var}(y) = \sigma^2 \mathbf{I}_8$, $\qquad \mathrm{var}(\hat{e}) = \sigma^2 (Z_2' Z_2)^{-1} = \dfrac{\sigma^2}{8}\mathbf{I}$

σ^2 estimé avec 4 ddl par $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{AB}(y_{ABi} - y_{AB.})^2$

$$\frac{\hat{e}(A) - e(A)}{\hat{\sigma}/\sqrt{8}} \sim t_4$$

$$\hat{e}(A) - 2.78\,\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{8}} \leq e(A) \leq \hat{e}(A) + 2.78\,\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{8}} \qquad \text{(seuil 5\%)}$$

Table du t de student				
α / $d.d.l$	0.10	0.05	0.01	0.001
...				
3	2.353	3.182	5.841	12.924
4	2.132	2.776	4.604	8.610
5	2.015	2.571	4.032	6.869
...				
30	1.697	2.042	2.750	3.646
∞	1.646	1.962	2.581	3.300

Exemple de traitement de plans factoriels complets

- 2^2 sans répétitions (EX2P2)
- 2^2 avec 2 répétitions de chaque traitement (EX2P2R)
- 2^4 sans répétitions (Cf références ci-dessous) (EX2P4)
- 2^4 avec 8 traitements répétés (EX2P4R)

Références :

1/ thèse microbiologie de Sophie CLIQUET (1990). Production d'inoculums liquides de *Bradyrhizobium Japonicum*. Univ. Aix-Marseille II.

2/ texte non publié de Christine DURIER

Exercice :

Expliciter les calculs dans le cas du plan 2^2 avec répétitions

T	T codé	pH	pH codé	y
30	1	8.5	1	6.5
30	1	8.5	1	9.5
30	1	7.5	−1	14.0
30	1	7.5	−1	14.0
20	−1	8.5	1	2.0
20	−1	8.5	1	6.0
20	−1	7.5	−1	4.5
20	−1	7.5	−1	−0.5

Traitement plans factoriels complets avec ANALYS

EX2P2: Deux facteurs à 2 niveaux, sans répétitions

```
                          EX2P2

  T  pH #tau  y
 30 8.5    8  7
 30 7.5   14 12
 20 8.5    4  7
 20 7.5    2  3

       Parametres du premier ecran de saisie

                  Nom d'analyse : EX2P2
             Librairie standard : D:/kobia/courstat/exanalys/
                           Plan : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p2.dat
                      Variables : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p2.dat
        Etude du plan seulement :  non
 largeur de page a l'impression : 0
 caracteres accentues elimines  :  oui

   Fichier ou a ete lu le plan : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p2.dat

 Fichier lecture des variables : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p2.dat

facteurs et covariables :

 libelle nat type niveaux

 T       num fac
 pH      num fac

Variables analysees :  tau y
 Parties de modele : P:T+pH
            Modele : P.P
        Sur-Modele :

 ----------------  ANALYSE ---------------

Calcul de la matrice X associee au modele

contrastes pour facteur T

 niv c0 c1
  20  1 -1
  30  1  1

contrastes pour facteur pH
```

```
 niv c0 c1
 7.5  1 -1
 8.5  1  1


Variance(s) expliquee(s)  28 13.58  ddl = 3
Variance(s) d'erreur  0 0  ddl = 0
R^2 = 1 1


variable  tau

 effet    +/-   +/-    +/-
         (95%) (99%) (99.9%)
       7     0     0       0
 T     4     0     0       0
 T.pH -2     0     0       0
 pH   -1     0     0       0

variable  y

 effet       +/-   +/-    +/-
            (95%) (99%) (99.9%)
       7.25     0     0       0
 T     2.25     0     0       0
 T.pH -2.25     0     0       0
 pH   -0.25     0     0       0


Calcul des moyennes

Moyenne sur le(s) facteur(s)  T
    tau   y
 20   3 5.0
 30  11 9.5

Moyenne sur le(s) facteur(s)  pH
     tau   y
 7.5   8 7.5
 8.5   6 7.0

Moyenne sur le(s) facteur(s)  T pH
        tau  y
 20 7.5   2  3
 20 8.5   4  7
 30 7.5  14 12
 30 8.5   8  7
```

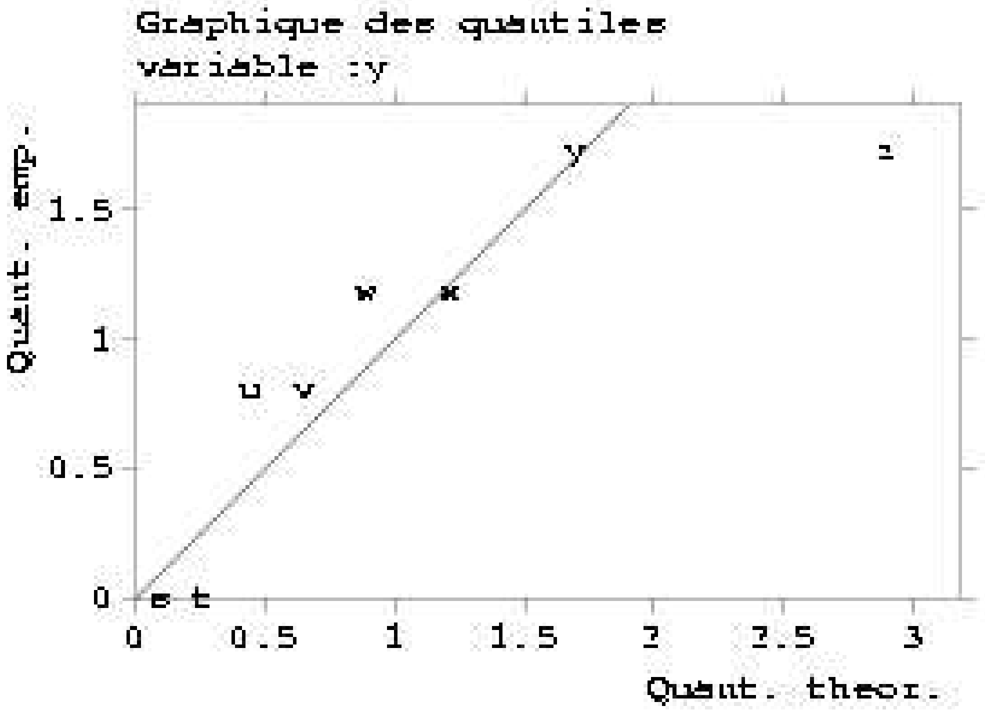
EX2P2R: Deux facteurs à 2 niveaux, avec répétitions

```
                         EX2P2R

  T  pH  # y
 30 8.5  6.5
 30 8.5  9.5
 30 7.5 14.0
 30 7.5 14.0
 20 8.5  2.0
 20 8.5  6.0
 20 7.5  4.5
 20 7.5 -0.5

       Parametres du premier ecran de saisie

                  Nom d'analyse : EX2P2R
             Librairie standard : D:/kobia/courstat/exanalys/
                           Plan : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p2r.dat
                      Variables : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p2r.dat
        Etude du plan seulement :  non
 largeur de page a l'impression : 0
 caracteres accentues elimines  :  oui

   Fichier ou a ete lu le plan : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p2r.dat

 Fichier lecture des variables : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p2r.dat


facteurs et covariables :

 libelle nat type niveaux

 T       num fac
 pH      num fac

Variables analysees :  y
 Parties de modele : P:T+pH
            Modele : P.P
        Sur-Modele :


 ----------------  ANALYSE ---------------

Calcul de la matrice X associee au modele


contrastes pour facteur T
```

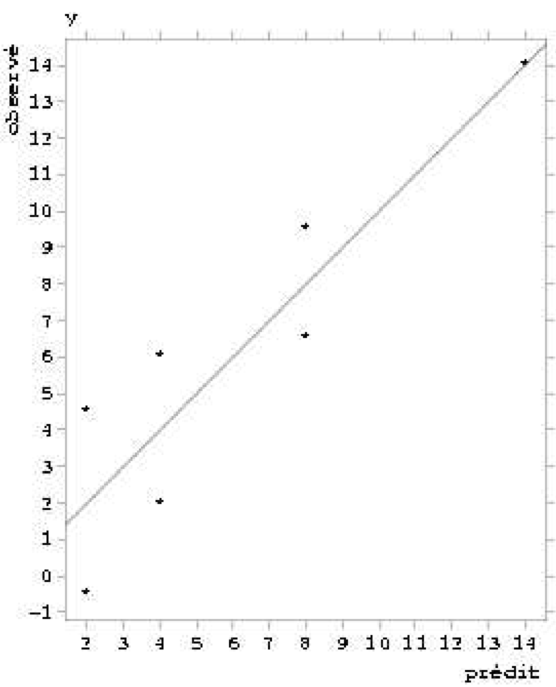
```
 niv c0 c1
  20  1 -1
  30  1  1

contrastes pour facteur pH

 niv c0 c1
 7.5  1 -1
 8.5  1  1


Variance(s) expliquee(s)  56  ddl = 3
Variance(s) d'erreur  6.25  ddl = 4
R^2 = 0.8705


Analyse avec l'erreur er ddl = 4
              y
 CM erreur 6.25
 ect-type  2.50

Carres Moyens

      ddl   y
        1 392
 T      1 128
 pH     1   8
 T.pH   1  32

F de Snedecor

      ddl    y
        1 62.7
 T      1 20.5
 pH     1  1.3
 T.pH   1  5.1

Probabilites (%)

         y
       0.1
 T     1.1
 pH   32.1
 T.pH  8.6

Signification

      y
      **
```

```
 T    *
 pH
 T.pH

variable  y

 effet     +/-    +/-    +/-
          (95%)  (99%) (99.9%)
       7 2.4541 4.0695  7.6105
 T     4 2.4541 4.0695  7.6105
 T.pH -2 2.4541 4.0695  7.6105
 pH   -1 2.4541 4.0695  7.6105


 Calcul des residus

 Edition du plan analyse :

    T  pH
 1 30 8.5
 2 30 8.5
 3 30 7.5
 4 30 7.5
 5 20 8.5
 6 20 8.5
 7 20 7.5
 8 20 7.5


variable y
      Y YP   YR    NR    YRn      t     P   s   S
 1  6.5  8 -1.5 0.707 -0.849 -0.812 0.476
 2  9.5  8  1.5 0.707  0.849  0.812 0.476
 3 14.0 14  0.0 0.707  0.000  0.000 1.000
 4 14.0 14  0.0 0.707  0.000  0.000 1.000
 5  2.0  4 -2.0 0.707 -1.131 -1.188 0.320
 6  6.0  4  2.0 0.707  1.131  1.188 0.320
 7  4.5  2  2.5 0.707  1.414  1.732 0.182
 8 -0.5  2 -2.5 0.707 -1.414 -1.732 0.182


 Complement au graphique des quantiles, variable y
symboles et valeurs des quantiles pour les residus les plus grands

 symb n0   Qemp   Prob    Qth
 z     8 1.7321 0.9375 2.9000
 y     7 1.7321 0.8125 1.7010
 x     5 1.1882 0.6875 1.2113
 w     6 1.1882 0.5625 0.8933
```

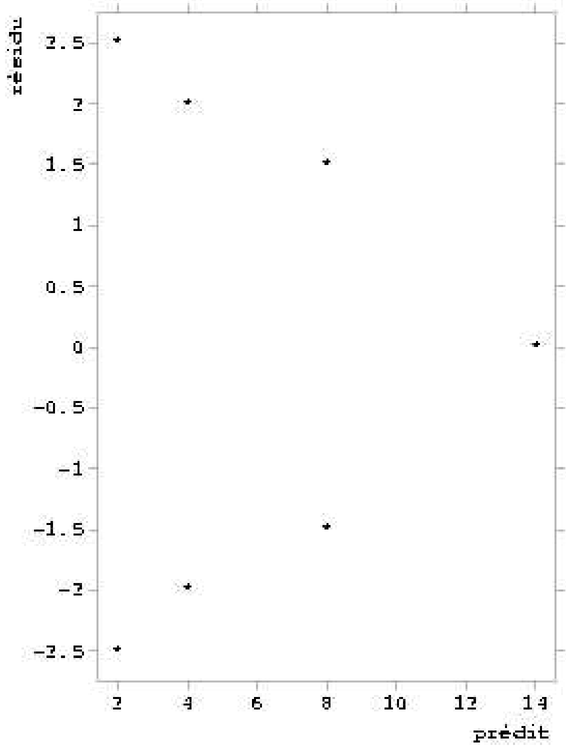
```
 v     1 0.8115 0.4375 0.6492
 u     2 0.8115 0.3125 0.4434
 t     4 0.0000 0.1875 0.2588
 s     3 0.0000 0.0625 0.0852


Calcul des moyennes

Moyenne sur le(s) facteur(s)  T
     y
 20  3
 30 11

Moyenne sur le(s) facteur(s)  pH
     y
 7.5 8
 8.5 6

Moyenne sur le(s) facteur(s)  T pH
         y
 20 7.5  2
 20 8.5  4
 30 7.5 14
 30 8.5  8
```



Graphique des quantiles
variable :y
Quant. emp.
Quant. theor.



y
observé
prédit



résidu
prédit

EX2P4 : Exemple de plan factoriel complet à 4 facteurs : Mise au point de milieux de culture pour une bactérie symbiote du soja, *Bradyrhizobium japonicum*

C. Durier, A. Kobilinsky

Afin d'améliorer la production d'inoculums de *Bradyrhizobium japonicum*, bactérie fixatrice de l'azote pour le soja, le laboratoire de Microbiologie des Sols de l'INRA Dijon et la société BIOPROX ont effectué un travail sur plusieurs années dont nous avons extrait une étape. Une série d'expérimentations a été consacrée à la recherche de de milieux de culture en fioles permettant de disposer d'inoculums riches en germes viables.

Suite à une sélection des facteurs les plus importants (non présentée ici), il est apparu intéressant d'étudier particulièrement des milieux riches en azote organique. Pour ce faire, quatre facteurs ont été retenus, chacun à 2 niveaux, afin d'explorer en un temps limité différents milieux. Comme les données microbiologiques sont généralement soumises à une variabilité non contrôlée importante, la moitié des milieux a été répétée.

Les facteurs étudiés et leurs niveaux sont:

pH	5	6
Source de Carbone	Glucose	Glycérol
Dose d'Azote organique (Glutamate de sodium)	150 mg/l	250 mg/l
Dose d'Extrait de Levure	0.1 g/l	0.5 g/l

Les niveaux sont codés: Glucose -1, Glycérol $+1$; les niveaux bas -1 et les niveaux hauts $+1$. La réponse étudiée est le dénombrement de germes viables après 6 jours. Le plan est précisé dans le tableau 3.1 avec les résultats observés à droite. Il figure dans un ordre très systématique qui fait apparaître clairement sa structure: d'abord les 16 traitements du plan factoriel complet, puis les 8 répétitions, obtenues ici en formant toutes les combinaisons de niveaux des trois premiers facteurs et en prenant alors le niveau codé du 4ème facteur opposé à celui du 3ème. L'ordre de fabrication des milieux, de disposition des fioles, etc ... a été randomisé pour éviter qu'un effet dû au mode de réalisation ne vienne se superposer aux effets des facteurs étudiés. L'analyse statistique des résultats est effectuée avec pour réponse le logarithme décimal des dénombrements, transformation utile ici pour se rapprocher de l'hypothèse d'homogénéité des variances des erreurs.

L'analyse obtenue avec ANALYS, avec un modèle comprenant toutes les interactions, donc 16 effets, est donnée plus loin. Il y a 24 données, 16 effets estimés soit $8 = 24-16$ degrés de liberté pour estimer la variance d'erreur σ^2. Celle ci est estimée par $\hat{\sigma}^2 = 0.02674$ et l'écart-type résiduel par $\hat{\sigma} = \sqrt{0.02674} = 0.16353$. Comparé à la moyenne générale $e(\mathbf{1}) = 9.4869$, qui apparait sur la première ligne du tableau des effets, cet écart-type est faible. Le coefficient de variation (C.V), rapport entre les deux, n'est que de $1.72\% = 0.16353/9.4869$. C'est ce qui explique que certains effets apparaissent nettement significatifs, à savoir les effets principaux $e(\text{doseN}) = -0.2782$, $e(\text{extrlev}) = -0.1982$ et l'interaction de trois facteurs $e(\text{doseN.extrlev.sourceC}) = 0.1652$.

Les effets sont calculés exactement comme dans le cas de 2 facteurs à 2 niveaux. Le choix du codage est important pour cette définition car si on échange 1 et -1 pour un facteur, on

OBS	pH	sourceC	doseN	extrlev	NBG=Nb germes/ml	$\log_{10}$(NBG)
1	−1	−1	−1	−1	8700000000	9.9395
2	−1	−1	−1	1	4600000000	9.6628
3	−1	−1	1	−1	8800000000	9.9445
4	−1	−1	1	1	400000000	8.6021
5	−1	1	−1	−1	8400000000	9.9243
6	−1	1	−1	1	5800000000	9.7634
7	−1	1	1	−1	2600000000	9.415
8	−1	1	1	1	490000000	8.6902
9	1	−1	−1	−1	4200000000	9.6232
10	1	−1	−1	1	4500000000	9.6532
11	1	−1	1	−1	9100000000	9.959
12	1	−1	1	1	880000000	8.9445
13	1	1	−1	−1	12000000000	10.0792
14	1	1	−1	1	2400000000	9.3802
15	1	1	1	−1	650000000	8.8129
16	1	1	1	1	3300000000	9.5185
17	−1	−1	−1	1	8600000000	9.9345
18	−1	−1	1	−1	4800000000	9.6812
19	−1	1	−1	1	4700000000	9.6721
20	−1	1	1	−1	1600000000	9.2041
21	1	−1	−1	1	2300000000	9.3617
22	1	−1	1	−1	6500000000	9.8129
23	1	1	−1	1	4800000000	9.6812
24	1	1	1	−1	1000000000	9.0000

TAB. 3.1 – *Données*

change le signe des effets où apparaît ce facteur. En l'occurence, le programme a gardé le codage introduit dans les données. Cela est indiqué par les contrastes c1 reportés en début d'analyse qui coincident dans chaque cas avec le niveau.

La demi-différence $e(doseN)$ entre le niveau haut 1 et le niveau bas -1 de la dose d'azote est donc -0.2782. En moyenne donc, le niveau faible de cette dose donne un $\log(NBG)$ supérieur de $0.56 = 2 \times 0.2782$ au niveau fort. En d'autres termes, en mettant la dose faible, on multiplie en moyenne la population de rhizobium par un facteur $3.6 = 10^{0.56}$. Mais la présence d'une interaction de trois facteurs significative du même ordre de grandeur que l'effet dose d'azote montre qu'on ne peut optimiser la dose d'azote sans prendre en compte aussi les deux autres facteurs présent dans cette interaction, sourceC et extrlev. Le calcul des moyennes pour les 8 combinaisons de ces trois facteurs fait apparaître que pour le milieu Glycérol $(+1)$, les meilleurs résultats sont obtenus avec les doses d'azote et d'extrait de levure les plus faibles (-1) et pour le milieu Glucose (-1), les meilleurs résultats sont obtenus avec peu d'extrait de levure (-1) sans effet net de la dose d'azote.

Ces résultats sont vérifiés en fioles en présence de glucose ou de glycérol, et confirment les valeurs obtenues dans le plan d'expérience. Elles sont par ailleurs supérieures au milieu de référence "Burton".

Source C	Dose N	extr. lev.	nb germes observé ($\log_{10}$)
glucose (−1)	250 (+1)	0.1 (−1)	$7.9 10^9$ (9.90)
glycérol (+1)	150 (−1)	0.1 (−1)	$10.6 10^9$ (10.02)
Référence Burton			$2 10^9$ (9.30)

Remarques.

- ➤ L'écart-type résiduel indique la façon dont varie le nombre de germes quand on utilise un même milieu de culture. C'est cette variabilité qui sert de base pour étudier l'effet des facteurs. Si pour simplifier l'expérimentation, on prépare d'abord les 16 milieux différents puis on subdivise en deux ceux pour lesquels on a besoin de répétitions, la différence entre les deux répétitions d'un même milieu ne sera pas affectée par les sources d'erreurs venant de la préparation du milieu et l'écart-type résiduel sera trop faible, ce qui conduira à trouver trop d'effets significatifs.
- ➤ D'autre part, dans une telle expérimentation, on peut toujours se demander si la physiologie des bactéries ne varie pas d'une période à une autre, introduisant des différences sensibles dans la croissance sur un même milieu. Aussi il peut être judicieux d'introduire un facteur de variation comme la période d'expérimentation. On fait l'expérience en deux fois. Si ce facteur supplémentaire n'interagit pas avec les autres, cela indique une certaine robustesse des résultats. On peut aussi introduire des rhizobium de plusieurs origines, etc ... Cette introduction de *facteurs de bruit* pour permettre de juger de la stabilité des effets des facteurs de composition du milieu comme sourceC, extrlev, doseN, pH appelés eux les *facteurs contrôlables*, a été proposée par Taguchi et est très largement utilisé dans l'industrie pour le contrôle de la qualité.
- ➤ Supposons que seules les 16 premières expériences correspondant au plan factoriel complet on été effectuées. Pour dégager quelques degrés de liberté pour estimer la variance résiduelle σ^2, il est naturel de postuler que les interactions de 3 facteurs ou plus sont nuls. L'analyse donne alors le résultat du tableau 3.2. En fait c'est à partir des écarts au modèle incluant la constante, les 4 effets principaux et les 6 interactions de 2 facteurs qu'a été calculée la variance d'erreur. Ce modèle ne prend pas en compte l'interaction sourceC.extrlev.doseN et donne de ce fait un écart-type résiduel presque 3 fois plus grand que dans le cas avec répétitions. Par suite les effets doseN et extrlev ne sont plus significatifs à 5%.

  Pour aller plus loin, on peut remarquer que le facteur pH n'apparait que dans des effets relativement faibles et le supprimer du modèle. On retrouve alors un tout petit peu moins marqués les effets du plan avec répétition. Mais il faut être conscient qu'en supprimant ainsi à vue des effets jugés faibles du modèle, on a tendance à sous estimer la variance résiduelle et à obtenir d'avantage d'effets significatifs. Une façon peut-être plus objective d'analyser consiste à utiliser les méthodes telles que le graphique de Daniel et la méthode de Box-Meyer qui sont adaptées à ce type de plan sans répétitions.

  On notera que bien que l'on soit ici dans le cas assez rare où il existe une interaction de trois facteurs non négligeable, le plan sans répétition s'avére intéressant. Il amène avec 16 expériences au lieu de 24 à la conclusion qu'on a sans doute intérêt à travailler plutôt

Variance résiduelle	0.2072	(ddl : 5)
Ect-type résiduel	0.4552	

ANOVA	ddl	F Sned	Prob(%)
pH	1	0.0	98.8
sourceC	1	0.2	69.9
doseN	1	5.2	7.2
extrlev	1	3.7	11.4
pH.sourceC	1	0.0	98.6
pH.doseN	1	0.4	56.0
pH.extrlev	1	0.7	44.0
sourceC.doseN	1	0.5	51.3
sourceC.extrlev	1	0.9	38.7
doseN.extrlev	1	0.5	51.7

Effet		+/− (95%)	+/− (99%)
	9.495	0.293	0.459
doseN	−0.259	0.293	0.459
extrlev	−0.218	0.293	0.459
sourceC.extrlev	0.108	0.293	0.459
pH.extrlev	0.095	0.293	0.459
sourceC.doseN	−0.08	0.293	0.459
doseN.extrlev	−0.079	0.293	0.459
pH.doseN	0.071	0.293	0.459
sourceC	−0.047	0.293	0.459
pH.sourceC	−0.002	0.293	0.459
pH	0.002	0.293	0.459

TAB. 3.2 – *Analyse de variance de la variable* $\log_{10}$*(NBG)*

autour des doses faible d'azote et d'extrait de levure. Une suite possible et logique à ce plan consisterait à refaire un nouveau plan factoriel 3^2 expérimentant doseN et extrlev à trois nouveaux centrés autour des doses faibles 150 mg/l et 0.1 g/l, en maintenant pH et sourceC dans les conditions qui ont donné le meilleur résultat, Glycérol à pH 6 (10.0792). Avec $25 = 16 + 9$ données au total, une telle procédure aurait pu s'avérer plus efficace que le plan a 24 données réalisé.

Sorties du programme ANALYS

```
    Parametres du premier ecran de saisie

               Nom d'analyse : EX2P4R
          Librairie standard : D:/kobia/courstat/exanalys/
                        Plan : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p4r.dat
                   Variables : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p4r.dat
       Etude du plan seulement :  non
 largeur de page a l'impression : 0
 caracteres accentues elimines  :  oui

   Fichier ou a ete lu le plan : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p4r.dat

 Fichier lecture des variables : D:/kobia/courstat/exanalys/Ex2p4r.dat


facteurs et covariables :

 libelle nat type niveaux
```

```
 pH      num fac
 sourceC num fac
 doseN   num fac
 extrlev num fac

Variables analysees :  logNBG
 Parties de modele : P:pH+sourceC+doseN+extrlev
            Modele : P+P.P+P.P.P+P.P.P.P
        Sur-Modele :

 ----------------  ANALYSE ---------------

Calcul de la matrice X associee au modele

contrastes pour facteur pH
 niv c0 c1
  -1  1 -1
   1  1  1

contrastes pour facteur sourceC
 niv c0 c1
  -1  1 -1
   1  1  1

contrastes pour facteur doseN
 niv c0 c1
  -1  1 -1
   1  1  1

contrastes pour facteur extrlev
 niv c0 c1
  -1  1 -1
   1  1  1


Variance(s) expliquee(s)  0.2692  ddl = 15
Variance(s) d'erreur  0.02674  ddl = 8
R^2 = 0.9497

Analyse avec l'erreur er ddl = 8
            logNBG
 CM erreur 0.02674
 ect-type  0.16353

                               F Sned   Proba (%)  Sign.

                          ddl  logNBG    logNBG    logNBG
                            1 71796.1       0.0    ***
 pH                         1     0.1      73.2
```

sourceC	1	0.6	46.2	
doseN	1	61.7	0.0	***
extrlev	1	31.3	0.1	***
pH.sourceC	1	1.1	33.2	
pH.doseN	1	6.8	3.1	*
pH.extrlev	1	4.4	7.0	
sourceC.doseN	1	4.5	6.6	
sourceC.extrlev	1	8.4	2.0	*
doseN.extrlev	1	4.1	7.7	
pH.sourceC.doseN	1	1.0	34.7	
pH.sourceC.extrlev	1	1.1	32.4	
pH.doseN.extrlev	1	10.3	1.2	*
sourceC.doseN.extrlev	1	21.8	0.2	**
pH.sourceC.doseN.extrlev	1	5.5	4.7	*

variable logNBG

effet		+/- (95%)	+/- (99%)	+/- (99.9%)
	9.4869	0.081646	0.1188	0.17849
doseN	-0.2782	0.081646	0.1188	0.17849
extrlev	-0.1982	0.081646	0.1188	0.17849
sourceC.doseN.extrlev	0.1652	0.081646	0.1188	0.17849
pH.doseN.extrlev	0.1136	0.081646	0.1188	0.17849
sourceC.extrlev	0.1029	0.081646	0.1188	0.17849
pH.doseN	0.0925	0.081646	0.1188	0.17849
pH.sourceC.doseN.extrlev	0.0831	0.081646	0.1188	0.17849
sourceC.doseN	-0.0752	0.081646	0.1188	0.17849
pH.extrlev	0.0740	0.081646	0.1188	0.17849
doseN.extrlev	-0.0717	0.081646	0.1188	0.17849
pH.sourceC.extrlev	0.0372	0.081646	0.1188	0.17849
pH.sourceC	0.0366	0.081646	0.1188	0.17849
pH.sourceC.doseN	-0.0354	0.081646	0.1188	0.17849
sourceC	-0.0273	0.081646	0.1188	0.17849
pH	0.0126	0.081646	0.1188	0.17849

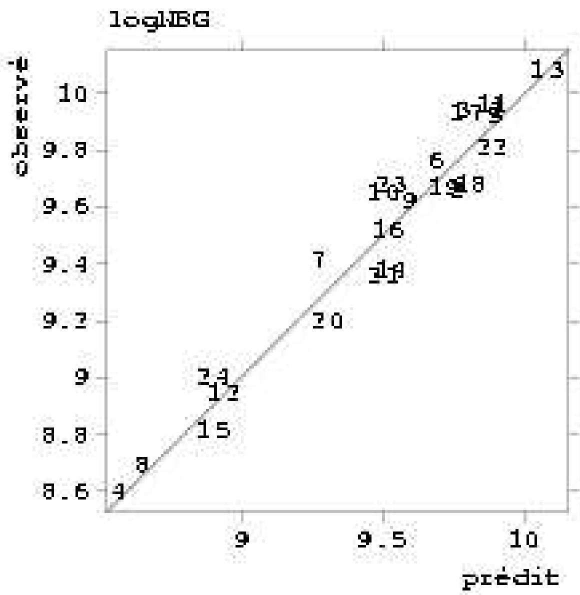
RESIDUS

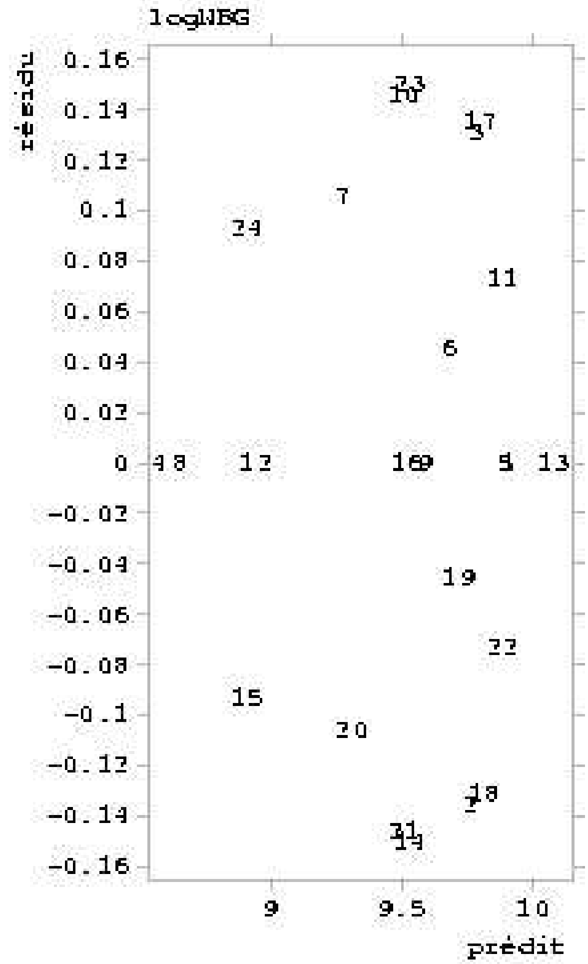
variable logNBG

	pH	sourceC	doseN	extrlev	Y	YP	YR	NR	YRn	t	P	s	S
1	-1	-1	-1	-1	9.9395	9.940	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000		
2	-1	-1	-1	1	9.6628	9.799	-0.136	0.707	-1.175	-1.208	0.266		
3	-1	-1	1	-1	9.9445	9.813	0.132	0.707	1.138	1.163	0.283		
4	-1	-1	1	1	8.6021	8.602	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000		
5	-1	1	-1	-1	9.9243	9.924	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000		
6	-1	1	-1	1	9.7634	9.718	0.046	0.707	0.395	0.373	0.720		
7	-1	1	1	-1	9.4150	9.310	0.105	0.707	0.912	0.901	0.397		
8	-1	1	1	1	8.6902	8.690	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000		
9	1	-1	-1	-1	9.6232	9.623	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000		

```
10  1      -1    -1      1     9.6532  9.507  0.146 0.707  1.260  1.317 0.229
11  1      -1     1     -1     9.9590  9.886  0.073 0.707  0.632  0.606 0.563
12  1      -1     1      1     8.9445  8.945  0.000 0.000  0.000  0.000 1.000
13  1       1    -1     -1    10.0792 10.079  0.000 0.000  0.000  0.000 1.000
14  1       1    -1      1     9.3802  9.531 -0.150 0.707 -1.302 -1.371 0.213
15  1       1     1     -1     8.8129  8.906 -0.094 0.707 -0.809 -0.790 0.456
16  1       1     1      1     9.5185  9.519  0.000 0.000  0.000  0.000 1.000
17 -1      -1    -1      1     9.9345  9.799  0.136 0.707  1.175  1.208 0.266
18 -1      -1     1     -1     9.6812  9.813 -0.132 0.707 -1.138 -1.163 0.283
19 -1       1    -1      1     9.6721  9.718 -0.046 0.707 -0.395 -0.373 0.720
20 -1       1     1     -1     9.2041  9.310 -0.105 0.707 -0.912 -0.901 0.397
21  1      -1    -1      1     9.3617  9.507 -0.146 0.707 -1.260 -1.317 0.229
22  1      -1     1     -1     9.8129  9.886 -0.073 0.707 -0.632 -0.606 0.563
23  1       1    -1      1     9.6812  9.531  0.151 0.707  1.302  1.371 0.213
24  1       1     1     -1     9.0000  8.906  0.094 0.707  0.809  0.790 0.456

Calcul des moyennes

Moyenne sur le(s) facteur(s)  doseN
    logNBG
 -1  9.765
  1  9.209

Moyenne sur le(s) facteur(s)  extrlev
    logNBG
 -1  9.685
  1  9.289

Moyenne sur le(s) facteur(s)  doseN extrlev
       logNBG
 -1 -1  9.892
 -1  1  9.639
  1 -1  9.479
  1  1  8.939

Moyenne sur le(s) facteur(s)  doseN extrlev sourceC
          logNBG
 -1 -1 -1  9.781
 -1 -1  1 10.002
 -1  1 -1  9.653
 -1  1  1  9.624
  1 -1 -1  9.849
  1 -1  1  9.108
  1  1 -1  8.773
  1  1  1  9.104
```

Graphiques pour l'étude des RESIDUS


logNBG
observé
prédit


logNBG
résidu
prédit

PRINCIPE ET PROPRIETE DES PLANS FRACTIONNAIRES REGULIERS A 2 NIVEAUX

Ex: 2 facteurs A, B à 2 niveaux codés 1, -1
2 unités expérimentales

	$\mathbf{1}$	A	B	AB	$AB=-1$	
$\tau(-1,-1)$	1	-1	-1	1		
$\tau(-1,\ 1)$	1	-1	1	-1	$\star$	$\longrightarrow y(-1{,}1)$
$\tau(\ 1,-1)$	1	1	-1	-1	$\star$	$\longrightarrow y(1,-1)$
$\tau(\ 1,\ 1)$	1	1	1	1		
	$e(\mathbf{1})$	$e(A)$	$e(B)$	$e(AB)$	**effets factoriels**	

Fraction définie par $AB=-1$.

$$AB=-1 \quad\Longrightarrow\quad A^2B=-A \quad\Longrightarrow\quad B=-A$$

$$\tau(A{,}B)=e(\mathbf{1})+AB\ e(AB)+A\ e(A)+B\ e(B)$$

$$AB=-1,\qquad B=-A$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcccc}
\tau(A{,}B) & = & [e(\mathbf{1})-e(AB)] & + \quad A & [e(A)-e(B)] \\
 & & \gamma(\mathbf{1}) & + \quad A & \gamma(A)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc}
\tau(-1{,}1) & = & \gamma(\mathbf{1}) & - & \gamma(A) \\
\tau(1,-1) & = & \gamma(\mathbf{1}) & + & \gamma(A)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{bmatrix} \tau(-1,\ \ 1) \\ \tau(\ \ 1,-1) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{1}) \\ \gamma(A) \end{bmatrix} \\
\tau_0 & = & Z_0 & & \gamma
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\begin{bmatrix} y(-1,\ \ 1) \\ y(\ \ 1,-1) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{1}) \\ \gamma(A) \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \varepsilon(-1,\ \ 1) \\ \varepsilon(\ \ 1,-1) \end{bmatrix} \\
y_0 & & \mathbf{1} \quad A & & & & \varepsilon_0
\end{array}$$

$$y_0 = Z_0\gamma + \varepsilon_0.$$

Or Z_0 vérifie $$Z_0'Z_0 = Z_0Z_0' = 2\,\mathbf{I},$$

donc $$\gamma = \frac{1}{2}Z_0'\tau_0 \qquad \hat{\gamma} = \frac{1}{2}Z_0'y_0$$

ce qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}(\mathbf{1}) &= \mathbf{1}'y/2 = \langle y,\mathbf{1}\rangle/2 = [\ y(-1,1) + y(1,-1)]/2 \\
\hat{\gamma}(A) &= A'y/2 = \langle y,A\rangle/2 = [-y(-1,1) + y(1,-1)]/2
\end{aligned}$$

f.e.b: $\gamma(\mathbf{1}) = e(\mathbf{1}) - e(AB), \qquad \gamma(A) = e(A) - e(B)$

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{var}(y(A,B)) = \sigma^2\\ \text{Observations}\\ \text{indépendantes}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl}\mathrm{var}\,(\hat\gamma(\mathbf{1})) &=& \sigma^2/2\\ \mathrm{var}\,(\hat\gamma(A)) &=& \sigma^2/2\\ \mathrm{cov}\,(\hat\gamma(\mathbf{1}),\hat\gamma(A)) &=& 0\end{array}$$

Terminologie :

$$\begin{array}{ccc} e(\mathbf{1}) & \text{confondu avec} & e(AB)\\ e(A) & \text{confondu avec} & e(B)\end{array}$$

- $\gamma(\mathbf{1})$ et $\gamma(A)$ estimés orthogonalement
  avec variance σ^2/N $(N = 2)$

- $e(\mathbf{1})$ estimable si $e(AB) = 0$

Construction :

A	$B = -A$
-1	1
1	-1

A : **facteur de base**

On peut aussi prendre B comme facteur de base

PLAN FRACTIONNAIRE REGULIER 2^{3-1}

Ex: 3 facteurs A, B, C à 2 niveaux codés 1, -1
4 unités expérimentales

	$\mathbf{1}$	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	$ABC=-1$	
$\tau(-1,-1,\ 1)$	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1		
$\tau(-1,-1,-1)$	1	−1	−1	−1	1	1	1	−1	$\star$	$\longrightarrow y(-1,-1,-1)$
$\tau(-1,\ 1,\ 1)$	1	−1	1	1	−1	−1	1	−1	$\star$	$\longrightarrow y(-1,\ 1,\ 1)$
$\tau(-1,\ 1,-1)$	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1		
$\tau(\ 1,-1,\ 1)$	1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	$\star$	$\longrightarrow y(\ 1,-1,\ 1)$
$\tau(\ 1,-1,-1)$	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1		
$\tau(\ 1,\ 1,\ 1)$	1	1	1	1	1	1	1	1		
$\tau(\ 1,\ 1,-1)$	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1	$\star$	$\longrightarrow y(\ 1,\ 1,-1)$
	$e(\mathbf{1})$	$e(A)$	$e(B)$	$e(C)$	$e(AB)$	$e(AC)$	$e(BC)$	$e(ABC)$		**effets factoriels**

Fraction définie par $ABC=-1$. On a

?

$$\tau(A,B,C) = e(\mathbf{1}) + ABC\ e(ABC) + A\ e(A) + BC\ e(BC) + B\ e(B) + AC\ e(AC) + C\ e(C) + AB\ e(AB)$$

$$\Downarrow$$

$$\tau(A,B,C) = \gamma(\mathbf{1}) + \quad A\gamma(A) + \quad B\gamma(B) + \quad AB\gamma(AB)$$

où :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{1}) &= \_\_\_ \\ \gamma(A) &= \_\_\_ \\ \gamma(B) &= \_\_\_ \\ \gamma(AB) &= \_\_\_ \end{aligned}$$

Sur la fraction

$$
\begin{array}{rcllll}
\tau(A,B,C) & = & \gamma(\mathbf{1}) & + \; A \; \gamma(A) & + \; B \; \gamma(B) & + \; AB \; \gamma(AB) \\
\tau(-1,-1,-1) & = & \gamma(\mathbf{1}) & \gamma(A) & \gamma(B) & \gamma(AB) \\
\tau(-1,\ 1,\ 1) & = & \gamma(\mathbf{1}) & \gamma(A) & \gamma(B) & \gamma(AB) \\
\tau(\ 1,-1,\ 1) & = & \gamma(\mathbf{1}) & \gamma(A) & \gamma(B) & \gamma(AB) \\
\tau(\ 1,\ 1,-1) & = & \gamma(\mathbf{1}) & \gamma(A) & \gamma(B) & \gamma(AB) \\
 & & ? & ? & ? &
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} \tau(-1,-1,-1) \\ \tau(-1,\ 1,\ 1) \\ \tau(\ 1,-1,\ 1) \\ \tau(\ 1,\ 1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}
$$

$$
\tau_0 \qquad = \qquad Z \qquad\qquad \gamma
$$

$$
\begin{bmatrix} y(-1,-1,-1) \\ y(-1,\ 1,\ 1) \\ y(\ 1,-1,\ 1) \\ y(\ 1,\ 1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon(-1,-1,-1) \\ \varepsilon(-1,\ 1,\ 1) \\ \varepsilon(\ 1,-1,\ 1) \\ \varepsilon(\ 1,\ 1,-1) \end{bmatrix}
$$

$$
y \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon
$$

$$
y = Z\gamma + \varepsilon.
$$

Or Z vérifie $\qquad Z'Z = ZZ' = \_\_\_$

donc $\qquad \gamma = \_\_\_ \qquad \hat{\gamma} = \_\_\_$

ce qui s'écrit aussi

$$
\begin{array}{rcl}
\hat{\gamma}(\mathbf{1}) & = & \mathbf{1}'y/\,4 \;=\; \langle y,\mathbf{1}\rangle/\,4 \;=\; [\,y(-1,-1,-1) + y(-1,1,1) + y(1,-1,1) + y(1,1,-1)]/\,4 \\
\hat{\gamma}(A) & = & \\
\hat{\gamma}(B) & = & \\
\hat{\gamma}(AB) & = &
\end{array}
$$

?

f.e.b :

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{var}(y(A,B,C)) = \sigma^2 \\ \text{Observations} \\ \text{indépendantes}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \operatorname{var}(\hat{\gamma}(\mathbf{1})) & = & \_\_\_\_\_\_\_ \\ \operatorname{var}(\hat{\gamma}(A)) & = & \_\_\_\_\_\_\_ \\ \operatorname{var}(\hat{\gamma}(B)) & = & \_\_\_\_\_\_\_ \\ \operatorname{var}(\hat{\gamma}(AB)) & = & \_\_\_\_\_\_\_ \\ \operatorname{cov}(\hat{\gamma}(\mathbf{1}),\hat{\gamma}(A)) & = & \_\_\_\_\_\_\_ \\ & \ldots & \\ \operatorname{cov}(\hat{\gamma}(A),\hat{\gamma}(AB)) & = & \_\_\_\_\_\_\_ \end{array}$$

Terminologie :

$$\begin{array}{lll} e(\mathbf{1}) & \text{confondu avec} & \_\_\_\_\_\_\_ \\ e(A) & \text{confondu avec} & \_\_\_\_\_\_\_ \\ & \ldots & \_\_\_\_\_\_\_ \\ & & \_\_\_\_\_\_\_ \end{array}$$

- $\gamma(\mathbf{1}), \gamma(A), \gamma(B), \gamma(AB)$ estimés orthogonalement avec variance
- $e(\mathbf{1})$ estimable si _______
  $e(A)$ estimable si _______
  $e(B)$ estimable si _______
  $e(C)$ estimable si _______

Construction :

A	B	C = ___
-1	-1	1
-1	1	-1
1	-1	-1
1	1	1

A, B : **facteurs de base**

Dans ce cas, on peut également prendre comme facteurs de base soit le couple $(A,\ C)$, soit le couple $(B,\ C)$.

FRACTION 2^{6-2}

Ex: 6 facteurs A, B, C, D, E, F à 2 niveaux codés 1, -1
16 unités expérimentales

facteurs de base : A, B, C, D

facteurs définis : $E = ABC, \quad F = -BCD.$

Relations (mots, produits, contrastes) **de définition.**

$$\mathbf{1} = \qquad = \qquad =$$

Egalités engendrées (effets confondus)

$$\begin{array}{rcccccc} A & = & & = & & = & \\ AB & = & & = & & = & \\ & & & \dots & & & \\ ABCD & = & & = & & = & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma(\mathbf{1}) & = e(\mathbf{1}) \quad + \qquad\qquad - \qquad\qquad - \qquad\qquad , \\ \gamma(A) & = e(A) \quad + \qquad\qquad - \qquad\qquad - \qquad\qquad , \\ \dots & \\ \gamma(AB) & = e(AB) + \qquad\qquad - \qquad\qquad - \qquad\qquad , \\ \dots & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclrcl} \hat{\gamma}(\mathbf{1}) & = & \langle \mathbf{y}, \mathbf{1} \rangle / 16 & \mathrm{var}\,(\hat{\gamma}(\mathbf{1})) & = & \sigma^2 / \\ & \dots & & \mathrm{var}\,(\hat{\gamma}(A)) & = & \sigma^2 / \\ \hat{\gamma}(A) & = & \langle \mathbf{y}, A \rangle / 16 & \mathrm{var}\,(\hat{\gamma}(AB)) & = & \sigma^2 / \\ \hat{\gamma}(AB) & = & \langle \mathbf{y}, AB \rangle / 16 & \mathrm{cov}\,(\hat{\gamma}(\mathbf{1}), \hat{\gamma}(AB)) & = & \\ & \dots & & & \dots & \end{array}$$

$E = A+B+C \pmod 2$ $F = 1+B+C+D \pmod 2$					
A	B	C	D	E	F
0	0	0	0		
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	0	1		
1	0	1	0		
1	0	1	1		
1	1	0	0		
1	1	0	1		
1	1	1	0		
1	1	1	1		
notation additive					

$E = ABC$ $F = -BCD$					
A	B	C	D	E	F
1	1	1	1		
1	1	1	−1		
1	1	−1	1		
1	1	−1	−1		
1	−1	1	1		
1	−1	1	−1		
1	−1	−1	1		
1	−1	−1	−1		
−1	1	1	1		
−1	1	1	−1		
−1	1	−1	1		
−1	1	−1	−1		
−1	−1	1	1		
−1	−1	1	−1		
−1	−1	−1	1		
−1	−1	−1	−1		
notation multiplicative					

TAB. 4.3 – *Fraction* 1/4 *d'un* 2^6

RESOLUTION 3, 4, 5

Longueur de mot minimale 4 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{RESOLUTION 4}}$

$$\mathbf{1} = ABCE \longrightarrow A = BCE$$

$$\longrightarrow AB = CE, \quad AC = BE, \quad AE = BC$$

. effets principaux confondus avec interactions 3 facteurs

. interactions deux facteurs (2f) confondues entre elles

$\boxed{\text{RESOLUTION 3}}$ 2^{5-2} défini par $D = AB$, $E = AC$

$$\begin{array}{lccccccc} & 1 & = & ABD & = & ACE & = & BCDE \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{longueur} & & & 3 & & 3 & & 4 \end{array}$$

Profil : $3_2 4_1$

$$\begin{array}{ccccccc} A & = & & = & & = & \\ AB & = & & = & & = & \end{array}$$

$$\ldots$$

Propriétés ?

Exercice

Préciser toutes les f.e.b de cette fraction.

Si y désigne le vecteur des 8 réponses observées, préciser les estimateurs de ces f.e.b et leurs variances?

Déterminer ensuite ces estimations numériquement pour chacun des deux vecteurs de réponse y_1, y_2 figurant dans le tableau ci-dessous.

Retrouver les résultats avec ANALYS.

Quelles conclusions amène ces résultats pour chacune des deux observations?

Fraction 2^{5-2} : plan et données

A	B	C	$D = AB$	$E = AC$	y_1	y_2
-1	-1	-1	1	1	33	43
-1	-1	1	1	-1	67	57
-1	1	-1	-1	1	127	37
-1	1	1	-1	-1	173	63
1	-1	-1	-1	-1	37	107
1	-1	1	-1	1	63	193
1	1	-1	1	-1	123	93
1	1	1	1	1	177	207

(Les valeurs de y_1, y_2 ont été choisies pour faciliter les calculs.)

$$(1 = ABD = ACE = BCDE)$$

La fraction définie par $D = ABC$, $E = AB$, qui vérifie

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & = & ABCD & = & ABE & = & CDE \\ & & 4 & & 3 & & 3 \end{array}$$

est **équivalente**. La permutation $\begin{array}{ccc} A & BD & CE \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ E & AB & CD \end{array}$

fait passer de la première à la seconde.

Même **TYPE** de fraction

$\boxed{\text{RESOLUTION 5}}$ 2^{8-2} : $G = ABCD$, $H = CDEF$

$$\begin{array}{lccccccc} & 1 & = & ABCDG & = & CDEFH & = & ABEFGH \\ \text{longueur} & & & 5 & & 5 & & 6 \end{array}$$

Profil : $5_2 6_1$

$$\begin{array}{ccccccc} A & = & BCDG & = & ACDEFH & = & BEFGH \\ AB & = & CDG & = & ABCDEFH & = & EFGH \end{array}$$

$$\cdots$$

Propriétés ?

Majoration du nombre de facteurs en résolution 3 (plan régulier)

2^s unités expérimentales $\longrightarrow$ jusqu'à $2^s - 1$ facteurs

Exemple $s = 3$

$8 = 2^3$ unités $\longrightarrow$ jusqu'à $7 = 2^3 - 1$ facteurs.

Construction :

A	B	C	$D = AB$	$E = AC$	$F = BC$	$G = ABC$
-1	-1	-1	1	1	1	-1
-1	-1	1	1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	1	-1	1
-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1

Autre possibilité : changer le signe d'une colonne,

par exemple $D = -AB$

(échange les niveaux de D)

Relations de définitions génératrices

$$ABD = 1, \qquad ACE = 1, \qquad BCF = 1, \qquad ABCG = 1$$

Exercice. Compléter les cases blanches. Souligner les mots de définition de 3 lettres dans le premier tableau, les interactions de deux facteurs dans le second. Compléter les f.e.b. Indiquer ce qu'elles deviennent si on remplace $D = AB$ par $D = -AB$.

mots de définition			
$\mathbf{1}$	$\underline{ABD}$	$\underline{ACE}$	$BCDE$
$\underline{BCF}$	$ACDF$	$ABEF$	$\underline{DEF}$
$ABCG$			$ADEG$
	$BDFG$		$ABCDEFG$

$\times \quad A \quad \downarrow$

effets confondus avec A			
$\underline{A}$	$\underline{BD}$	$\underline{CE}$	$ABCDE$
$ABCF$	CDF	BEF	$ADEF$
BCG			DEG
	$ABDFG$		$BCDEFG$

Hypothèse : **interactions de 3 facteurs ou plus nulles**

f.e.b.
$$\gamma(A) = e(A) +$$
$$\gamma(B) = e(B) +$$

Résolution 3, nombre de facteurs $\leq$ nombre maximum

Les fractions obtenues en prenant un sous ensemble de facteurs

- ➤ ont au moins la résolution 3
- ➤ possèdent éventuellement des propriétés supplémentaires intéressantes, par exemple
  - effets principaux non confondus avec des interactions de deux facteurs (2fi)
  - paquets d'effets confondus de petite taille
  - résolution supérieure à 3

Exemples.

- 2^{5-2}. On retient 5 des 7 facteurs. On montre dans ce cas que tous les choix sont équivalents à une permutation des facteurs près (de même type).

  La fraction donnée précédemment est obtenue en éliminant F, G de la 2^{7-4}. Noter qu'alors que la fraction 2^{7-4} confond chaque effet principal avec 3 interactions de deux facteurs, cette fraction 2^{5-2} confond chaque effet principal avec une seule interaction, hormis A confondu avec deux interactions.

- 2^{4-1}. On retient 4 des 7 facteurs. Tous les choix ne sont pas équivalents.

  Exercice. Des deux choix $\{A,B,C,D\}$, $\{A,B,C,G\}$, lequel vous apparaît préférable ? (justifier)

Majoration du nombre de facteurs en résolution 4 (plan régulier)

2^s unités expérimentales $\longrightarrow$ jusqu'à 2^{s-1} facteurs

Exemple $s = 4$

$16 = 2^4$ unités $\longrightarrow$ jusqu'à $8 = 2^{4-1}$ facteurs.

Construction :

Les facteurs ajoutés sont produits d'un nombre impair de facteurs de base. Dans l'exemple

A	B	C	D	$E = ABC$	$F = ABD$	$G = ACD$	$H = BCD$
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1
-1	-1	1	-1	1	-1	1	1
-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1	1	1	-1	1
-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1

Exercice

Prouver que cette fraction est de résolution 4. Quels sont les mots de définition de longueur 4? En examinant les couples de lettres qui apparaissent dans ces mots, préciser la taille des ensembles d'interactions de deux facteurs confondues entre elles. Préciser la f.e.b qui contient l'interaction AB. Si on suppose nulles les interactions de 3 facteurs ou plus, l'analyse d'un tel plan dégage-t-elle des degrés de liberté pour estimer la variance résiduelle?

---

nombre de facteurs $\leq$ nombre maximum

7 ou 6 facteurs : tous les choix sont équivalents

5 facteurs : le choix $E = ABCD$ conduisant à la résolution 5 est généralement préférable.

Doublement par l'opposé d'un plan de résolution 3

unités 1 à 8 : plan à 5 fact. de réso. 3							unité 9 à 16 : fraction opposée						
S	A	B	C	D	E	y	S	A	B	C	D	E	y
1	−1	−1	−1	1	1	63	− 1	1	1	1	−1	−1	267
1	−1	−1	1	1	−1	67	−1	1	1	−1	−1	1	163
1	−1	1	−1	−1	1	77	−1	1	−1	1	1	−1	93
1	−1	1	1	−1	−1	93	−1	1	−1	−1	1	1	−23
1	1	−1	−1	−1	−1	17	−1	−1	1	1	1	1	53
1	1	−1	1	−1	1	113	−1	−1	1	−1	1	−1	57
1	1	1	−1	1	−1	183	−1	−1	−1	1	−1	1	47
1	1	1	1	1	1	307	−1	−1	−1	−1	−1	−1	23
$\mathbf{1} = ABD = ACE = BCDE$							$\mathbf{1} = ABDS = ACES = BCDE$						

Exercice

Le tableau ci-dessous donne à gauche les résultats d'analyse de la fraction 2^{5-3} de résolution 3, à droite l'analyse des 16 résultats obtenus après doublement par l'opposé. Expliquer à la lumière des résultats du plan doublé les résultats obtenus pour la première fraction de résolution 3.

Analyse variable y							
sur fraction 2^{5-2}				sur fraction doublée par l'opposé			
effet		+/− (95%)	+/− (99%)	effet		+/− (95%)	+/− (99%)
	115	16.4	37.8		100	16.4	37.8
B	50	16.4	37.8	B	50	16.4	37.8
A	40	16.4	37.8	A	40	16.4	37.8
D	40	16.4	37.8	$A.B$	40	16.4	37.8
C	30	16.4	37.8	C	30	16.4	37.8
E	25	16.4	37.8	$A.C$	25	16.4	37.8
				S	15	16.4	37.8
				$A.D$	0	16.4	37.8
				$B.D$	0	16.4	37.8
				D	0	16.4	37.8
				$A.E$	0	16.4	37.8
				E	0	16.4	37.8
				$B.C$	0	16.4	37.8
				$B.E$	0	16.4	37.8

Majoration du nombre de facteurs en résolution 5 (plan régulier)

➤ Pas de formule générale. Le tableau ci-dessous donne le nombre maximum h de facteur pour 2^s facteurs, $s \leq 9$.

s	4	5	6	7	8	9
2^s	16	32	64	128	256	512
h	5	6	8	11	17	≥ 23

Exemple. cf la fraction 2^{8-2} déjà donnée.

Choix d'une fraction régulière (cas de la résolution 4)

Exemple : fractions 2^{7-2} régulières de résolution 4

	Définition	Mots de définition	Profil
1	$F = ABCDE \quad G = ABC$	$\mathbf{1} \quad ABCDEF \quad ABCG \quad DEFG$	$4_2 6_1$
2	$F = ABCD \quad G = CDE$	$\mathbf{1} \quad ABCDF \quad CDEG \quad ABEFG$	$4_1 5_2$
3	$F = ABC \quad G = BCD$	$\mathbf{1} \quad ABCF \quad BCDG \quad ADFG$	4_3

Profil : une notation comme $4_2 6_1$ indique 2 mots de longueur 4
1 mot de longueur 6

➤ Ce sont les mots de 4 lettres qui conduisent aux confusions.

Aberration minimum = Nombre minimum de mots de 4 lettres
≠ nombre d'interactions confondues minimum

mais

si le nombre de mots de 4 lettres W_4 est petit, on connait le nombre minimal k_2 d'interactions de deux facteurs confondues :

W_4	1	2	3	4	5	6	7	> 7
k_2	6	12	15	21	24	28	21	≥ 21

Peut être utilisé dans certain cas pour montrer que

aberration minimum $\Longrightarrow$ nb. d'interactions confondues minimum.

Sélection d'une fraction d'aberration minimum

➤ On sait trouver la fraction 2^{n-p} d'aberration minimale si $p \leq 5$.

➤ Lorsque p est compris entre 6 et 9 et $n - p \leq 9$, des tableaux permettent de trouver une fraction d'aberration minimum ou quasi-minimale (**Franklin**).

Lecture et principe de formation des tables.

Fractions 2^{n-3} d'aberration minimum pour $6 \leq n \leq 13$

n	fréquences							profil	réso.
6	1	1	1	1	1	1	0	$3_4\,4_3$	3
7	1	1	1	1	1	1	1	4_7	4
8	2	1	1	1	1	1	1	$4_3\,5_4$	4
9	2	2	1	1	1	1	1	$4_1\,5_4\,6_2$	4
10	2	2	2	1	1	1	1	$5_3\,6_3\,7_1$	5
11	2	2	2	2	1	1	1	$6_6\,8_1$	6
12	2	2	2	2	2	1	1	$6_2\,7_4\,8_1$	6
13	2	2	2	2	2	2	1	$7_4\,8_3$	7
	1	1	1	1	0	0	0		
	1	1	0	0	0	1	1		
	1	0	1	0	1	0	1		

Fraction 2^{8-3} d'aberration minimum

2 A_1,A_2	1 B	1 C	1 D	1 E	1 F	1 G		
1	1	1	1	0	0	0	$A_1A_2BCD = 1$	$D = A_1A_2BC$
1	1	0	0	0	1	1	$A_1A_2BFG = 1$	$F = A_1A_2BG$
1	0	1	0	1	0	1	$A_1A_2CEG = 1$	$E = A_1A_2CG$
Matrice génératrice							Relations génératrices	

Construire la fraction 2^{9-3} d'aberration minimum

Traiter les exercices 8, 9, 10

Recherche de fractions 2^{15-9}

- Faire une recherche non exhaustive de 20 fractions par PLANOR.
- Les comparer à la fraction d'aberration quasi minimale donnée par les tables de Franklin.

Répartition en blocs

➤ 2 blocs. Le facteur bloc R est traité comme les autres facteurs. Mais on considère qu'il n'interagit pas avec les autres facteurs.

Exemple. Répartir en 2 blocs un plan factoriel complet 2^3. Soit A, B, C les facteurs traitement, R le facteur bloc.

Règle			$R = A$	$R = B$	$R = AB$	$R = C$	$R = AC$	$R = BC$	$R = ABC$
R conf. avec			A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	−1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1
1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
−1	1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
−1	1	−1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
−1	−1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
−1	−1	−1	−1	−1	1	−1	1	1	−1

Meilleure règle: $R = ABC$

➤ 2^r blocs. On les définit par r **"pseudofacteurs bloc"** à deux niveaux $R_1, R_2, \ldots, R_r$.

Exemple. Répartir en 4 blocs le plan factoriel complet 2^5. On note A, B, C, D, E les facteurs traitement, R_1, R_2 les deux pseudofacteurs blocs.

Quelques relations de définition possibles:

$R_1 = AB$	$R_2 = CDE$	$(R_1R_2 = \quad)$
$R_1 = AB$	$R_2 = BCDE$	$(R_1R_2 = \quad)$
$R_1 = ABC$	$R_2 = CDE$	$(R_1R_2 = \quad)$

Exercice. Compléter le tableau et préciser la meilleure répartition en bloc.

➤ Répartition en 2^r blocs d'un 2^n. Maximum de r pour ne confondre aucun effet principal et aucune interaction de deux facteurs.

$$n \leq 2^{n-r} - 1$$

soit

$$\log_2(n+1) \leq n - r \Longleftrightarrow r \leq n - \log_2(n+1)$$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_{\max}$	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8

Exercice. Donner une répartition en $8 = 2^3$ blocs d'un plan factoriel complet 2^6 ne confondant ni effet principal ni interaction de deux facteurs.

➤ Répartition en 2^r blocs d'un 2^{n-p} Rechercher par programme en imposant que les effets traitement à estimer ne soit pas confondus avec les blocs

Exercice. Répartir en bloc un plan 2^{8-2} de résolution 5 de façon à ne confondre aucun effet principal et aucune interaction de deux facteurs avec les blocs.

Fraction 2^{15-9}

DEFINITION D'UN PLAN REGULIER

```
nom                                : P15M9A      (LIBEXP)
nb. d'unites                       : 64          (NBUNIT)
definition des facteurs de base    : utilisateur (CHOIXfu)
(qui definissent l'unite)
type de decomposition des facteurs : maximum     (CHOIXdf)
(en pseudofacteurs)
Recherche backtrack  - temps maxi  : 10 mn       (TMAX)
                   - nb. sol. max. : 1           (NBSOL)
                      - germe      : 0           (RLINK)
Inclusion des facteurs dans        : oui         (FACINEL)
l'ensemble ineligible
```

Commentaire

Plan d'aberration quasi minimale trouvé dans les tables de Franklin.

FACTEURS DE BASES

(LIBfu, NIVfu, BLOCfu,TYPfu, LIBNfu, NIVpsu)

fac.	nb. niv.	bloc	type niv.	niveaux	decomp. pseud.
j	2		num.	1 -1	
k	2		num.	1 -1	
l	2		num.	1 -1	
m	2		num.	1 -1	
n	2		num.	1 -1	
o	2		num.	1 -1	

FACTEURS A DEFINIR

(LIBf, NIVf, BLOCf, TYPf, LIBNf, NIVps)

fac.	nb. niv.	bloc	type niv.	niveaux	decomp. pseud.
a	2		num.	1 -1	
b	2		num.	1 -1	
c	2		num.	1 -1	
d	2		num.	1 -1	
e	2		num.	1 -1	
f	2		num.	1 -1	
g	2		num.	1 -1	
h	2		num.	1 -1	
i	2		num.	1 -1	

```
Parties de modele (pmod)

0  P:a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o

Modeles (mod)
0  P.P

Parties a estimer (esta)

0  P

Hierarchies (hieralpha)

0

Facteurs predefinis (pd)
```

```
0   a:j+k+l+m+n+o
1   b:j+k+l+m
2   c:j+k+l+n
3   d:j+m+o
4   e:j+n+o
5   f:k+m+o
6   g:k+n+o
7   h:l+m+o
8   i:l+n+o


.-----------.
|Matrice cle|
.-----------.

Premier 2
---------

Pour obtenir les niveaux d'un facteur en tete d'une colonne, on multiplie les
niveaux des facteurs de base figurant en tete de ligne par les coeffs dans la
colonne et on ajoute un entier naturel fixe a l'avance et inferieur a cR.
Calculs de niveaux effectues modulo 2.
   blocs
      cR 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0
         2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
         j k l m n o a b c d e f g h i
 2 j     1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0
 2 k     0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0
 2 l     0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1
 2 m     0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0
 2 n     0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
 2 o     0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1


Parties de modele

1  P:a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o

Modele selectionne

P.P

nb de mots de chaque profil dans le noyau

Le profil est defini par le nb. de facteurs a
2 niveaux apparaissant dans le mot

  2 nb mots
```

```
  0       1
  4      30
  5      60
  6      60
  7     105
  8     105
  9      60
 10      60
 11      30
 15       1

non imprimee (plus de 200 termes)

 liste detaillee des ensembles d'effets confondus du modele

  j k ;   d f ;   e g ;
  j l ;   e i ;   d h ;
  k l ;   f h ;   g i ;
  m b ;   n c ;
  j m ;   o d ;
  k m ;   o f ;
  a i ;   l b ;
  l m ;   o h ;
  k b ;   a g ;
  j b ;   a e ;
  j n ;   o e ;
  k n ;   o g ;
  a h ;   l c ;
  l n ;   o i ;
  a f ;   k c ;
  j c ;   a d ;
  m n ;   h i ;   b c ;   d e ;   f g ;
  e f ;   d g ;
  e h ;   d i ;
  f i ;   g h ;
  o a ;   n b ;   m c ;
  j o ;   n e ;   m d ;
  k o ;   m f ;   n g ;
  b h ;   c i ;
  l o ;   n i ;   m h ;
  b f ;   c g ;
  c e ;   b d ;
  m o ;   l h ;   a c ;   j d ;   k f ;
  k d ;   j f ;
  j h ;   l d ;
  k h ;   l f ;
  n a ;   o b ;
  n o ;   l i ;   a b ;   j e ;   k g ;
  k e ;   j g ;
```

```
  j i ;   l e ;
  k i ;   l g ;
  m a ;   o c ;
  m e ;   n d ;
  n f ;   m g ;
  l a ;   b i ;   c h ;
  m i ;   n h ;
  c f ;   k a ;   b g ;
  j a ;   b e ;   c d ;

liste des effets non confondus

  ;  j ;   k ;   l ;   m ;   b ;   n ;   c ;   o ;   d ;   f ;   h ;   e ;   g ;
>  i ;   a ;
Il y a :43 ens. d'effets confondus et
        16 effets non confondus
```

DEFINITION D'UN PLAN REGULIER

```
nom                                   : P15M9       (LIBEXP)
nb. d'unites                          : 64          (NBUNIT)
definition des facteurs de base       : utilisateur (CHOIXfu)
(qui definissent l'unite)
type de decomposition des facteurs    : maximum     (CHOIXdf)
(en pseudofacteurs)
Recherche backtrack  - temps maxi     : 10 mn       (TMAX)
                     - nb. sol. max.  : 20          (NBSOL)
                        - germe       : 4556797     (RLINK)
Inclusion des facteurs dans           : oui         (FACINEL)
l'ensemble ineligible
```

Commentaire

FACTEURS DE BASES

fac.	nb. niv.	bloc	type niv.
j	2		num.
k	2		num.
l	2		num.
m	2		num.
n	2		num.
o	2		num.

FACTEURS A DEFINIR

fac.	nb. niv.	bloc	type niv.
a	2		num.
b	2		num.
c	2		num.
d	2		num.
e	2		num.
f	2		num.
g	2		num.
h	2		num.
i	2		num.

Parties de modele (pmod)
P:a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o

```
Modeles                Parties a estimer
 P.P                    P
```

Confusion d'effets dans le modèle
P.P

```
.-----------------------------------------.
|Matrice cle. Solution 1, Germe : 4556797|
.-----------------------------------------.
```

Profil

2 nb mots

```
  0       1
  4      35
  5      42
  6      88
  7      80
  8     103
  9     100
 10      24
 11      32
 12       5
 13       2

Liste des effets confondus avec la moyenne
non imprimee (plus de 200 termes)


 liste detaillee des ensembles d'effets confondus du modele

  j k ;   n h ;   f i ;
  j l ;   f g ;
  k l ;   m d ;   a c ;   g i ;
  j m ;   g h ;
  k m ;   n g ;   l d ;
  l m ;   n i ;   k d ;   f h ;
  j d ;   h i ;   b e ;   n f ;
  j n ;   k h ;   d f ;
  k n ;   m g ;   j h ;   d i ;   b c ;
  l n ;   d g ;   m i ;   a b ;
  l h ;   m f ;
  m n ;   l i ;   k g ;
  j g ;   m h ;   a e ;   l f ;
  c e ;   d h ;   j i ;   k f ;
  k i ;   l g ;   n d ;   j f ;
  m c ;   a d ;   b g ;
  e h ;   c d ;   m a ;   b i ;
  n e ;   b f ;
  l a ;   n b ;   k c ;   e f ;
  j c ;   e i ;   b h ;
  e g ;   j a ;
  k a ;   l c ;
  c g ;   a i ;   m b ;
  l e ;   a f ;
  k e ;   c f ;
  j e ;   a g ;   c i ;   b d ;
  c h ;   d e ;   j b ;
  k b ;   n c ;
  n a ;   l b ;
  m e ;   a h ;
```

```
liste des effets non confondus

  ;  j ;   k ;   l ;   m ;   o c ;   o a ;   d ;   n ;   h ;   o e ;   o b ;   g
>;   i ;   f ;   o ;   j o ;   k o ;   l o ;   m o ;   c ;   a ;   o d ;   n o ;
>  o h ;   e ;   b ;   o g ;   o i ;   o f ;

Il y a :30 ens. d'effets confondus et
        30 effets non confondus

.-------------------------------------------.
|Matrice cle. Solution 2, Germe : 698365360|
.-------------------------------------------.
Profil

  2 nb mots

  0       1
  4      37
  5      48
  6      56
  7     112
  8     107
  9      80
 10      40
 11      16
 12      15

liste des effets non confondus

  ;  j ;   k ;   l ;   m ;   h ;   a d ;   n ;   a ;   d ;   k d ;   o ;   f ;
>i ;   c ;   d e ;   b ;   g ;   e ;   o d ;

Il y a :37 ens. d'effets confondus et
        20 effets non confondus


.--------------------------------------------.
|Matrice cle. Solution 3, Germe : 1784130929|
.--------------------------------------------.


nb de mots de chaque profil dans le noyau

Le profil est defini par le nb. de facteurs a
2 niveaux apparaissant dans le mot

  2 nb mots
```

```
  0       1
  4      46
  6     157
  8     197
 10      98
 12      12
 14       1

non imprimee (plus de 200 termes)

 liste detaillee des ensembles d'effets confondus du modele

  j k ;   o d ;   f h ;   m e ;   l b ;
  j l ;   e h ;   k b ;   m f ;
  k l ;   j b ;   n a ;   e f ;   m h ;
  j m ;   b h ;   k e ;   l f ;
  k m ;   c g ;   j e ;   b f ;   l h ;
  l m ;   d i ;   b e ;   j f ;   k h ;
  l e ;   m b ;   k f ;   j h ;   o i ;
  j n ;   g i ;   a b ;
  k n ;   l a ;
  l n ;   o c ;   k a ;
  c d ;   n b ;   j a ;
  m n ;   a h ;
  c i ;   n e ;   a f ;
  d g ;   a e ;   n f ;
  m a ;   n h ;   o g ;
  j o ;   h i ;   k d ;
  k o ;   j d ;   a c ;   f i ;
  l o ;   n c ;   e i ;   b d ;
  l d ;   o b ;   m i ;
  m o ;   d e ;   b i ;   a g ;
  m d ;   o e ;   l i ;
  d h ;   o f ;   k i ;
  o h ;   j i ;   n g ;   d f ;
  n o ;   g h ;   l c ;
  n d ;   b c ;   f g ;
  j c ;   e g ;   a d ;
  k c ;   o a ;   m g ;
  b g ;   a i ;   c f ;
  c h ;   l g ;
  m c ;   k g ;
  n i ;   j g ;   c e ;

liste des effets non confondus

  ;  j ;   k ;   l ;   b ;   m ;   e ;   f ;   h ;   n ;   a ;   o ;   d ;   i ;
>  c ;   g ;
```

```
Il y a :31 ens. d'effets confondus et
        16 effets non confondus

       ...

.------------------------------------------.
|Matrice cle. Solution 9, Germe : 414672641|
.------------------------------------------.

  Profil

  2 nb mots

  0       1
  4      43
  5      34
  6      80
  7      88
  8      95
  9     108
 10      32
 11      24
 12       5
 13       2

 liste detaillee des ensembles d'effets confondus du modele

  j l ;   g h ;   n c ;   o i ;
  k l ;   b d ;
  d f ;   g i ;   c e ;   l a ;   o h ;
  b f ;   k a ;
  h i ;   j a ;   n e ;   o g ;
  j n ;   f i ;   d g ;   l c ;   a e ;
  k n ;   b h ;
  l n ;   d h ;   j c ;   o f ;
  b g ;   k c ;
  d i ;   f g ;   l e ;   a c ;
  b i ;   k e ;
  n a ;   j e ;   f h ;   o d ;
  j o ;   d e ;   l i ;   c f ;   a g ;
  l o ;   a h ;   j i ;   n f ;
  k i ;   b e ;
  k h ;   n b ;
  e f ;   l g ;   c d ;   a i ;   j h ;
  k g ;   b c ;
  o a ;   j g ;   l h ;   n d ;
  n o ;   e g ;   l f ;   c i ;   a d ;
  o c ;   n i ;   j f ;   e h ;
  k f ;   a b ;
```

```
  n h ;   k b ;   e i ;   l d ;   c g ;   a f ;
  l b ;   k d ;
  o e ;   n g ;   c h ;   j d ;

liste des effets non confondus

  ;  j ;   k ;   j k ;   l ;   m a ;   m ;   j m ;   k m ;   l m ;   a ;   n ;
>c ;   m e ;   m n ;   o b ;   m c ;   e ;   o ;   k o ;   m h ;   i ;   m g ;
>m o ;   h ;   m i ;   g ;   m b ;   f ;   m d ;   j b ;   b ;   m f ;   d ;

Il y a :25 ens. d'effets confondus et
        34 effets non confondus
```

Fraction 2^{5-2}

```
       Données P5M2

  A    B    C    D    E #  y1    y2
 -1   -1   -1    1    1    33    43
 -1   -1    1    1   -1    67    57
 -1    1   -1   -1    1   127    37
 -1    1    1   -1   -1   173    63
  1   -1   -1   -1   -1    37   107
  1   -1    1   -1    1    63   193
  1    1   -1    1   -1   123    93
  1    1    1    1    1   177   207

--------------------------------------------------------------

       ANALYSE

       Parametres du premier ecran de saisie

                  Nom d'analyse : P5M2
             Librairie standard : C:/kobia/courstat/exanalys/
                           Plan : C:/kobia/courstat/exanalys/p5m2.dat
                      Variables : C:/kobia/courstat/exanalys/p5m2.dat
        Etude du plan seulement :  non
 largeur de page a l'impression : 0
 caracteres accentues elimines  :  oui


   Fichier ou a ete lu le plan : C:/kobia/courstat/exanalys/p5m2.dat

 Fichier lecture des variables : C:/kobia/courstat/exanalys/p5m2.dat



facteurs et covariables :

 libelle nat type niveaux

 A       num fac
 B       num fac
 C       num fac
 D       num fac
 E       num fac

Variables analysees :  y1 y2
 Parties de modele : P:A+B+C+D+E
            Modele : P+P.P
        Sur-Modele :
```

```
 ----------------  ANALYSE ---------------

Calcul de la matrice X associee au modele


contrastes pour facteur A

 niv c0 c1
  -1  1 -1
   1  1  1


contrastes pour facteur B

 niv c0 c1
  -1  1 -1
   1  1  1


contrastes pour facteur C

 niv c0 c1
  -1  1 -1
   1  1  1


contrastes pour facteur D

 niv c0 c1
  -1  1 -1
   1  1  1


contrastes pour facteur E

 niv c0 c1
  -1  1 -1
   1  1  1

ATTENTION ; matrice X'X non inversible

Le modele est reparametrise sous la forme X1 a. X1 est la matrice
obtenue en balayant les colonnes de X de la premiere a la derniere
et en retenant chaque colonne qui n'est pas combinaison lineaire
des precedentes. Les parametres de  a  sont alors les suivants

 1   +
```

```
 2   + A + B.D + C.E
 3   + B + A.D
 4   + C + A.E
 5   + D + A.B
 6   + E + A.C
 7   + B.C + D.E
 8   + B.E + C.D
```

```
Variance(s) expliquee(s)  3347 4376  ddl = 7
Variance(s) d'erreur  0 0  ddl = 0
R^2 = 1 1
```

variable y1

effet		+/- (95%)	+/- (99%)	+/- (99.9%)
	100	0	0	0
B	50	0	0	0
C	20	0	0	0
B.C	5	0	0	0
B.E	2	0	0	0
A	0	0	0	0
D	0	0	0	0
E	0	0	0	0

variable y2

effet		+/- (95%)	+/- (99%)	+/- (99.9%)
	100	0	0	0
A	50	0	0	0
C	30	0	0	0
E	20	0	0	0
B.C	5	0	0	0
B.E	2	0	0	0
B	0	0	0	0
D	0	0	0	0

Fraction 2^{n-3}

DEFINITION D'UN PLAN REGULIER

```
nom                                : P7M3        (LIBEXP)
nb. d'unites                       : 16          (NBUNIT)
definition des facteurs de base    : utilisateur (CHOIXfu)
(qui definissent l'unite)
type de decomposition des facteurs : maximum     (CHOIXdf)
(en pseudofacteurs)
Recherche backtrack  - temps maxi  : 10 mn       (TMAX)
                   - nb. sol. max. : 1           (NBSOL)
                      - germe      : 0           (RLINK)
Inclusion des facteurs dans        : oui         (FACINEL)
l'ensemble ineligible
```

Commentaire

FACTEURS DE BASES

fac.	nb. niv.	bloc	type niv.
A	2		num.
B	2		num.
C	2		num.
G	2		num.

FACTEURS A DEFINIR

fac.	nb. niv.	bloc	type niv.
D	2		num.
E	2		num.
F	2		num.

Parties de modele (pmod)

P:A+B+C+D+E+F+G

Modeles	Parties a estimer
P.P	P

Facteurs predefinis

```
0  D:A+B+C
1  F:A+B+G
2  E:A+C+G
```

Confusions dans le modèle P.P

```
.-----------.
|Matrice cle|
.-----------.
```

```
   blocs
      cR 1 1 1 0 0 0 0
         2 2 2 2 2 2 2
         A B C G D F E
 2 A     1 0 0 0 1 1 1
 2 B     0 1 0 0 1 1 0
 2 C     0 0 1 0 1 0 1
 2 G     0 0 0 1 0 1 1

Liste des effets confondus avec la moyenne

Profil
 2 nb mots

 0       1
 4       7

; A C G E ; C G D F ; A D F E ; B C F E ; A B G F ; B G D E ; A B C D ;

 liste detaillee des ensembles d'effets confondus du modele

  A B ;   G F ;   C D ;
  A C ;   G E ;   B D ;
  B C ;   F E ;   A D ;
  A G ;   C E ;   B F ;
  B G ;   A F ;   D E ;
  C G ;   A E ;   D F ;
  B E ;   C F ;   G D ;

liste des effets non confondus

 ;  A ;   B ;   C ;   D ;   G ;   F ;   E ;

Il y a :7 ens. d'effets confondus et
       8 effets non confondus
```

DEFINITION D'UN PLAN REGULIER

```
nom                                     : P8M3        (LIBEXP)
nb. d'unites                            : 32          (NBUNIT)
definition des facteurs de base    : utilisateur (CHOIXfu)
(qui definissent l'unite)
type de decomposition des facteurs : maximum     (CHOIXdf)
(en pseudofacteurs)
```

FACTEURS DE BASES

fac.	nb. niv.	bloc	type niv.
A	2		num.
a	2		num.
B	2		num.
C	2		num.
G	2		num.

FACTEURS A DEFINIR

fac.	nb. niv.	bloc	type niv.
D	2		num.
E	2		num.
F	2		num.

Parties de modele : P:A+a+B+C+D+E+F+G

Modeles : P.P   Parties a estimer : P

Facteurs predefinis
0 D:A+a+B+C
1 F:A+a+B+G
2 E:A+a+C+G

Confusion dans le modèle P.P

```
.-----------.
|Matrice cle|
.-----------.
```

```
      cR 1 0 1 1 0 0 0 0
         2 2 2 2 2 2 2 2
         A a B C G D F E
 2 A     1 0 0 0 0 1 1 1
 2 a     0 1 0 0 0 1 1 1
 2 B     0 0 1 0 0 1 1 0
 2 C     0 0 0 1 0 1 0 1
 2 G     0 0 0 0 1 0 1 1
```

Liste des effets confondus avec la moyenne

```
Profil
 2 nb mots

 0       1
 4       3
 5       4

 ; C G D F ; B C F E ; B G D E ; A a C G E ; A a D F E ; A a B G F ; A a B C D ;

 liste detaillee des ensembles d'effets confondus du modele

  G F ;   C D ;
  G E ;   B D ;
  B C ;   F E ;
  C E ;   B F ;
  B G ;   D E ;
  C G ;   D F ;
  B E ;   C F ;   G D ;

liste des effets non confondus

 ; A ; a ; A a ; B ; A B ; a B ; C ; A C ; a C ; a D ; A D ; D ; G ; A G ;
> a G ; a F ; A F ; F ; a E ; A E ; E ;

Il y a :7 ens. d'effets confondus et
        22 effets non confondus
```

```
                         DEFINITION D'UN PLAN REGULIER

nom                                : P9M3          (LIBEXP)
nb. d'unites                       : 64            (NBUNIT)

FACTEURS DE BASES                       FACTEURS A DEFINIR

 fac.  nb.   bloc  type                  fac.  nb.   bloc  type
       niv.        niv.                        niv.        niv.

 A        2        num.                  D        2        num.
 a        2        num.                  E        2        num.
 B        2        num.                  F        2        num.
 b        2        num.
 C        2        num.
 G        2        num.

Parties de modele :  P:A+a+B+b+C+D+E+F+G

Modeles : P.P            Parties a estimer: P

Facteurs predefinis

0  D:A+a+B+b+C
1  F:A+a+B+b+G
2  E:A+a+C+G

Confusion dans le modèle  : P.P

.-----------.
|Matrice cle|
.-----------.

      cR 1 0 1 0 1 0 0 0 0
         2 2 2 2 2 2 2 2 2
         A a B b C G D F E
 2 A     1 0 0 0 0 0 1 1 1
 2 a     0 1 0 0 0 0 1 1 1
 2 B     0 0 1 0 0 0 1 1 0
 2 b     0 0 0 1 0 0 1 1 0
 2 C     0 0 0 0 1 0 1 0 1
 2 G     0 0 0 0 0 1 0 1 1

Liste des effets confondus avec la moyenne

Profil
 2 nb mots

 0       1
```

```
 4       1
 5       4
 6       2

; B b G D E; B b C F E; C G D F; A a B b G F; A a D F E; A a C G E; A a B b C D ;

 liste detaillee des ensembles d'effets confondus du modele

  G F ;   C D ;
  C G ;   D F ;
  C F ;   G D ;

liste des effets non confondus

 ;A ; a ; A a ; B ; A B ; a B ; b ; A b ; a b ; B b ; C ; A C ; a C ; G E ;
> B C ; b D ; b C ; B D ; F E ; a D ; A D ; D ; G ; A G ; a G ; C E ; B G ;
> b F ; b G ; B F ; D E ; a F ; A F ; F ; a E ; A E ; E ; B E ; b E ;

Il y a :3 ens. d'effets confondus et
        40 effets non confondus
```

Analyse d'un plan de resolution 4 non régulier

plan à 24 unités, 12 facteurs de résolution 4 obtenu
par doublement d'un plan à 12 unités de résolution 3

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1
-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

```
--------------------------------------------------------

       Parametres du premier ecran de saisie

                  Nom d'analyse : HADAM12B

facteurs et covariables :

 libelle nat type niveaux

 A       num cov
 B       num cov
      ...
 L       num cov
 Parties de modele : P:A+B+C+D+E+F+G+H+I+J+K+L
            Modele : P+P.P

 ----------------  ANALYSE ---------------
```

```
1    +
2    + A
3    + B
4    + C
5    + D
6    + E
7    + F
8    + G
9    + H
10   + I
11   + J
12   + K
13   + L
14   + A.B - 0.333 C.D + 0.333 C.E - 0.333 C.F + 0.333 C.G + 0.333 C.H + 0.333 C.I
           + 0.333 C.J - 0.333 C.K + 0.333 C.L + 0.333 D.E + 0.333 D.F + 0.333 D.G
           - 0.333 D.H - 0.333 D.I + 0.333 D.J + 0.333 D.K + 0.333 D.L + 0.333 E.F
           - 0.333 E.G + 0.333 E.H - 0.333 E.I + 0.333 E.J - 0.333 E.K + 0.333 E.L
           - 0.333 F.G + 0.333 F.H + 0.333 F.I + 0.333 F.J + 0.333 F.K - 0.333 F.L
           - 0.333 G.H + 0.333 G.I + 0.333 G.J + 0.333 G.K + 0.333 G.L + 0.333 H.I
           - 0.333 H.J + 0.333 H.K + 0.333 H.L + 0.333 I.J + 0.333 I.K - 0.333 I.L
           - 0.333 J.K - 0.333 J.L + 0.333 K.L
15   + A.C - 0.333 B.D + 0.333 B.E - 0.333 B.F + 0.333 B.G + 0.333 B.H + 0.333 B.I
           + 0.333 B.J - 0.333 B.K + 0.333 B.L + 0.333 D.E + 0.333 D.F + 0.333 D.G
           + 0.333 D.H + 0.333 D.I - 0.333 D.J + 0.333 D.K - 0.333 D.L - 0.333 E.F
           - 0.333 E.G + 0.333 E.H + 0.333 E.I - 0.333 E.J + 0.333 E.K + 0.333 E.L
           + 0.333 F.G + 0.333 F.H - 0.333 F.I + 0.333 F.J + 0.333 F.K + 0.333 F.L
           + 0.333 G.H + 0.333 G.I + 0.333 G.J - 0.333 G.K - 0.333 G.L - 0.333 H.I
           - 0.333 H.J - 0.333 H.K + 0.333 H.L + 0.333 I.J + 0.333 I.K - 0.333 I.L
           + 0.333 J.K + 0.333 J.L + 0.333 K.L
16   + A.D - 0.333 B.C + 0.333 B.E + ...
17   + A.E + 0.333 B.C + 0.333 B.D + ...
18   + A.F - 0.333 B.C + 0.333 B.D + ...
19   + A.G + 0.333 B.C + 0.333 B.D - ...
20   + A.H + 0.333 B.C - 0.333 B.D + ...
21   + A.I + 0.333 B.C - 0.333 B.D - ...
22   + A.J + 0.333 B.C + 0.333 B.D + ...
23   + A.K - 0.333 B.C + 0.333 B.D - ...
24   + A.L + 0.333 B.C + 0.333 B.D + ...
```

```
Analyse d'un sous ensemble de 5 facteurs

                           Plan : D:/kobia/courstat/exanalys/Hadam12b
        Etude du plan seulement :  oui

 Parties de modele : P:A+B+C+D+E
            Modele : P.P

 ----------------  ANALYSE ---------------

Mesures d'efficacite par effet

EFFET  -- ddl = 1. Criteres tr : 1, det : 1
EFFET A -- ddl = 1. Criteres tr : 1, det : 1
EFFET B -- ddl = 1. Criteres tr : 1, det : 1
EFFET A.B -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538
EFFET C -- ddl = 1. Criteres tr : 1, det : 1
EFFET A.C -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538
EFFET D -- ddl = 1. Criteres tr : 1, det : 1
EFFET A.D -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538
EFFET E -- ddl = 1. Criteres tr : 1, det : 1
EFFET A.E -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538
EFFET B.C -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538
EFFET B.D -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538
EFFET B.E -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538
EFFET C.D -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538
EFFET C.E -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538
EFFET D.E -- ddl = 1. Criteres tr : 0.61538, det : 0.61538

Mesure globales d'efficacite du plan
 trace   det   valmin (globaux)
  0.719  0.868  0.333

-------------------------------------------------------------------
Analyse d'un sous ensemble de 6 facteurs

 Parties de modele : P:A+B+C+D+E+F           Modele : P.P

ATTENTION ; matrice X'X non inversible
Le modele est reparametrise sous la forme X1 a. X1 est la matrice
obtenue en balayant les colonnes de X de la premiere a la derniere
et en retenant chaque colonne qui n'est pas combinaison lineaire
des precedentes. Les parametres de  a  sont alors les suivants

  2   + A
  3   + B
  4   + A.B + D.F
  5   + C
  6   + A.C + D.E
```

```
  7   + D
  8   + A.D + E.F
  9   + E
 10   + A.E - C.F
 11   + F
 12   + A.F - C.F + D.E - D.F + E.F
 13   + B.C + E.F
 14   + B.D + C.F
 15   + B.E + C.F - D.E + D.F - E.F
 16   + B.F + D.E
 17   + C.D + C.F - D.E + D.F - E.F
 18   + C.E - D.F

Mesures d'efficacite par effet

EFFET     -- ddl = 1   effic. principales    :    1.000
EFFET A   -- ddl = 1   effic. principales    :    1.000
EFFET B   -- ddl = 1   effic. principales    :    1.000
EFFET C   -- ddl = 1   effic. principales    :    1.000
EFFET D   -- ddl = 1   effic. principales    :    1.000
EFFET E   -- ddl = 1   effic. principales    :    1.000
EFFET F   -- ddl = 1   effic. principales    :    1.000

EFFET A.B -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET A.C -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET A.D -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET A.E -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET A.F -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET B.C -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET B.D -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET B.E -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET B.F -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET C.D -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET C.E -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET C.F -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET D.E -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET D.F -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
EFFET E.F -- ddl = 1   effic. principales    :    0.000
```

INITIAL LIST OF FACTORS

surface characteristics

1	material	4
2	wear	2

biofilm characteristics

3	strain of bacteria	4
4	culture media	2
5	culture media concentration	2
6	culture media temperature	2
7	biofilm age	2

cleaning characteristics

8	cleaning agent	2
9	cleaning agent concentration	2
10	cleaning temperature	2
11	cleaning time	2
12	mechanical action (brush, cycle number, weight)	4

sanitation characteristics

13	disinfectant	2
14	time of contact	2
15	rinse time	2
16	rinse temperature	2

OTHER CONSTRAINTS

– 64 runs in blocks of size 8

– Cleaning temperature (10) constant on each block

MELANGE FACTEURS A 4 ET 2 NIVEAUX
(plan asymétrique)

A	A_1	A_2	A_1A_2
Mannitol	(1 ,	1)	1
Glycérol	(1 ,	−1)	−1
Gluconate	(−1 ,	1)	−1
Glucose	(−1 ,	−1)	1

B : 2 niveaux
A : 4 niveaux, décomposé en A_1, A_2.

Fraction $4 \times 2/2$ définie par $A_1A_2B = 1$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{1} & = & A_1A_2B \\
A_1 & = & A_2B \\
A_2 & = & A_1B \\
A_1A_2 & = & B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
\gamma(\mathbf{1}) & = & e(\mathbf{1}) & + & e(A_1A_2B) \\
\gamma(A_1) & = & e(A_1) & + & e(A_2B) \\
\gamma(A_2) & = & e(A_2) & + & e(A_1B) \\
\gamma(A_1A_2) & = & e(A_1A_2) & + & e(B)
\end{array}
$$

Résolution 2 seulement

Autre Exemple : $4^2 2^4/4$

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{2}{c}{\text{4 niveaux}} & \text{2 niveaux} \\
\overbrace{A_1,A_2}^{A} & \overbrace{B_1,B_2}^{B} & C,D,E,F
\end{array}
$$

. **Résolution** 5 **?**

S'il existe, on peut prendre A_1, A_2, B_1, B_2, C, D comme facteurs de base, et

$$\begin{array}{rclcl} E & = & \alpha\beta CD & & \alpha,\alpha' \in \{A_1,A_2,A_1A_2\} \\ F & = & \alpha'\beta' CD & & \beta,\beta' \in \{B_1,B_2,B_1B_2\} \end{array}$$

mais ceci donne une relation entre 4 facteurs :

$$EF = \alpha\alpha'\beta\beta'$$

. **Résolution** 4 **?**

Il existe 7 types de fractions $4^2 2^4/4$ (cf livre ASU)

	E	F	EF	profil
1	$E = A_1B_1CD$	$F = A_2B_2CD$	$EF = A_1A_2B_1B_2$	$(2,3)_2(2,2)$
2	$-$	$F = A_1B_2C$	$EF = B_1B_2D$	$(2,3)(2,2)(1,3)$
3	$E = A_1B_1C$	$F = A_1B_1D$	$EF = CD$	$(2,2)_2(0,4)$
4	$-$	$F = A_1B_2D$	$EF = B_1B_2CD$	$(2,2)_2(1,4)$
5	$-$	$F = A_2B_2C$	$EF = A_1A_2B_1B_2$	$(2,2)_3$
6	$-$	$F = A_2B_2D$	$EF = A_1A_2B_1B_2CD$	$(2,4)(2,2)_2$
7	$-$	$F = A_1CD$	$EF = B_1D$	$(2,2)(1,3)_2$

La recherche donne aussi une fraction $4^2 2^4/8$:

$$D = A_1B_1C, \quad E = A_2B_2C, \quad F = A_1A_2B_1B_2C$$

Limite sur le nombre de facteurs étudiables

- Facteurs à 2 niveaux : rappels.
- Nombres de niveaux quelconques

$$\boxed{\text{nb. de paramètres} \leq \text{nb. d'unités}}$$

Exemple : $N = 40$ unités

$h_4 = 2$ facteurs qualitatifs à 4 niveaux

h_2 nb. de facteurs à 2 niveaux

maximum de h_2 ?

Résolution 3 : h_2 max =?

Résolution 5 : h_2 max =?

Résolution 4 : h_2 max =?

Utiliser le résultat de Margolin :

$$\boxed{\text{nb. paramètres} \left\{ \begin{matrix} \text{effets principaux} \\ \text{interactions avec} \\ \text{1 des facteurs} \end{matrix} \right\} \leq \text{nb. d'unités.}}$$

Résolution 3 : $1+3+3+h_2 \leq 40$

Résolution 5 :

$$1+15+h_2+\frac{h_2(h_2-1)}{2}+6h_2 \leq 40$$

$$\frac{h_2^2}{2}+\frac{13}{2}h_2 \leq 24$$

$$h_2^2+13h_2-48 \leq 0$$

$$\Delta = 13^2+4\times 48 = 19^2$$

$$\text{racine} \quad \frac{-13\pm 19}{2} = \{-16{,}3\}$$

$$\boldsymbol{h_2\,\mathbf{max} = 3}$$

$\exists$? un dispositif avec $h_2 = 3 \longrightarrow$ SASQC -OPTEX.

Robustesse?

ddl résiduels?

Résolution 4 :

effets principaux,	ddl	$= 1+3+3+h_2$
interaction avec un facteur à 4 niveaux	ddl	$= 9+3h_2$

$$1+3+3+h_2+9+3h_2 \leq 40$$

$$4h_2 \leq 24$$

$$\boldsymbol{h_2\,\mathbf{max} = 6}$$

Facteurs à 2 **et** 4 **niveaux. Plan régulier.**

- Résolution 3, N puissance de 2

$$N = 4^s \qquad 1+3h_4 \leq 4^s$$

$$N = 2\times 4^s \qquad 1+3h_4 \leq 2\times 4^s$$

la limite peut être atteinte (Wu 1989)

Si $h_4 <$ à cette limite

h_2 peut être choisi pour avoir la saturation

i.e. $h_2 = N - (1+3h_4)$.

N **non puissance de** 2 : cf Dey (1985)

Facteurs à 2 et 4 niveaux

• <u>Résolution 4</u>

majoration h_4 et h_2 (Margolin)

$$1 + 3h_4 + h_2 + 9(h_4 - 1) + 3h_2 \leq N$$

$$12h_4 + 4h_2 - 8 \leq N$$

En particulier

$$h_4 \ \max \ = \frac{N+8}{12}$$

et pour $h_4 < \dfrac{N+8}{12}$

$$h_2 \leq \frac{N}{4} + 2 - 3h_4$$

Cas particulier $h_4 \leq 2$

$$h_4 = 1 \longrightarrow h_2 \leq \frac{N}{4} - 1$$

Limite généralement atteinte quand $\boldsymbol{N = 16k}$ par un plan orthogonal (Margolin, 1969)

Construction

H matrice $4k \times (4k-1)$ d'un plan de Plackett et Burman

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & H \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & -H \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & H \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & -H \end{array} \right] \end{array}$$

Pour $N = 48$, cette méthode donne un plan orthogonal pour 1 facteurs A à 4 niveaux, 11 facteurs à 2 niveaux.

-

$$h_4 = 2 \longrightarrow h_2 \leq \frac{N}{4} - 4$$

Limite généralement atteinte quand $\boldsymbol{N = 8k}$ par un plan orthogonal : cf Agrawal et Dey (1983)

Resolution 4. Nb. max. de fact. à 2 et 4 niveaux.

$N = 2^s$: nombre d'unités

h_4 : nombre de facteurs à 4 niveaux (à gauche)

h_2 : nombre de facteurs à 2 niveaux (nb. dans les cases)

( ) : maximum de Margolin (entre parenthèses)

h_4 \ N	8	16	32	64	128
0	4 (4)	8 (8)	16 (16)	32 (32)	64 (64)
1	1 (1)	3 (3)	7 (7)	15 (15)	31 (31)
2		0 (0)	4 (4)	12 (12)	28 (28)
3				7 (9)	$\geq$ 23 (25)
4				4 (6)	$\geq$ 20 (22)
5				2 (3)	$\geq$ 18 (19)
6				0 (0)	16 (16)
7					(13)
7					(10)
7					(7)
7					(4)
11					(1)

Exemple avec $N = 64$: $h_4 \leq 6$

si $h_4 = 3$, on a $h_2 \leq 7$ (limite de Margolin $= 9$).

Resolution 5. Nb. maxi de fact. à 2 et 4 niveaux.

$N = 2^s$: nombre d'unités

h_4 : nombre de facteurs à 4 niveaux (à gauche)

h_2 : nombre de facteurs à 2 niveaux (nb. dans les cases)

( ) : maximum de Margolin (entre parenthèses)

h_4 \ N	8	16	32	64	128	256
0	3 (3)	5 (5)	6 (7)	8 (10)	11 (15)	17 (22)
1	1 (1)	1 (2)	4 (4)	6 (8)	9 (12)	(19)
2		0 (0)	1 (2)	3 (5)	6 (9)	(16)
3				0 (2)	3 (7)	≥ 9 (13)
4					$\star\star\star$ (4)	6 (10)
5					$\star\star\star$ (1)	0 (7)
6						$\star\star\star$ (4)
7						$\star\star\star$ (2)

$\star\star\star$: valeur de h_4 impossible à obtenir avec plan régulier

Exemple avec $N = 128$: $h_4 \leq 3$ pour un plan régulier

si $h_4 = 3$, on a $h_2 \leq 3$ (limite de Margolin = 7).

4 **et** 2 **niveaux. Résolution** 3 **repliable en résolution** 4

$\mathcal{P}$ régulier de résolution 3. A quelle condition le doublement par l'opposé donne un plan de résolution 4?

Exemples

$\mathcal{P}_1 \; : \; C = A_1B$					$\mathcal{P}_2 \; : \; C = A_1A_2B$				
R	A_1	A_2	B	C	R	A_1	A_2	B	C
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	−1	−1	1	1	1	−1	−1
1	1	−1	1	1	1	1	−1	1	−1
1	1	−1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
1	−1	1	1	−1	1	−1	1	1	−1
1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	1
1	−1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	1
1	−1	−1	−1	1	1	−1	−1	−1	−1
$-\mathcal{P}_1$					$-\mathcal{P}_2$				
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−1	−1	1	1	−1	−1	−1	1	1
−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1	−1	1
−1	−1	1	1	1	−1	−1	1	1	−1
−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	−1	1
−1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1
−1	1	1	−1	1	−1	1	1	−1	−1
−1	1	1	1	−1	−1	1	1	1	1
$C = A_1BR$					$C = A_1A_2B$				
Résolution 4					Résolution 3				

• Réponse : pas de relation type $A_1A_2BC = 1$ (avec **3 facteurs, mais un nombre pair de symboles**).

Exercice: trouver le h_2 maximum avec $N = 16{,}32$, $h_4 = 1{,}2{,}3$ pour lequel $\exists$ un plan de résolution 3 doublable en résolution 4.

Définition d'effets factoriels. Cas général

——— Cas 2 niveaux ———

$$A_0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A_1 \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B_0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B_1 \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} : \quad \begin{array}{cc|cc|} & & \multicolumn{2}{c}{B} \\ & & -1 & 1 \\ \hline A & -1 & \tau(-1,-1) & \tau(1,-1) \\ & 1 & \tau(-1,\ 1) & \tau(1,\ 1) \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{A_0 \otimes B_0}{\begin{array}{cc|cc|} & & \multicolumn{2}{c}{B_0} \\ & & 1 & 1 \\ \hline A_0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}} \qquad \underset{A_1 \otimes B_0}{\begin{array}{cc|cc|} & & \multicolumn{2}{c}{B_0} \\ & & 1 & 1 \\ \hline A_1 & -1 & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}} \qquad \underset{A_0 \otimes B_1}{\begin{array}{cc|cc|} & & \multicolumn{2}{c}{B_1} \\ & & -1 & 1 \\ \hline A_0 & 1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}} \qquad \underset{A_1 \otimes B_1}{\begin{array}{cc|cc|} & & \multicolumn{2}{c}{B_1} \\ & & -1 & 1 \\ \hline A_1 & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}}$$

Chaque produit tensoriel $A_i \otimes B_j$ a 4 coordonnées indicées par les couples (A,B) de niveaux $\{(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\}$. La coordonnée indicée par (A,B) est

$$(A_i \otimes B_j)(A,B) = A_i(A)B_j(B)$$

L'effet $e(A_iB_j)$ s'obtient en sommant les produits entre les coefficients de $A_i \otimes B_j$ par les réponses théoriques correspondantes dans $\boldsymbol{\tau}$ et en divisant le résultat par 4.

Exemple : définition de $e(A_0B_1) = e(B_1)$

$$e(B_1) = \frac{1}{4}[-\tau(-1,-1) - \tau(1,-1) + \tau(-1,1) + \tau(1,1)]$$

De telles définitions peuvent aussi s'écrire avec un produit scalaire:

$$e(A_iB_j) = \frac{1}{4}\langle A_i \otimes B_j, \boldsymbol{\tau}\rangle \ .$$

Matriciellement

$$
\begin{bmatrix} e(\mathbf{1}) \\ e(A_1) \\ e(B_1) \\ e(A_1 B_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tau(-1,-1) \\ \tau(\ \ 1,-1) \\ \tau(-1,\ \ 1) \\ \tau(\ \ 1,\ \ 1) \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{e} = \frac{1}{4} \qquad C \qquad \boldsymbol{\tau}
$$

$$
\Longrightarrow \boldsymbol{\tau} = 4\, C^{-1} \mathbf{e}
$$

Or $CC' = 4\,\mathbf{I}$. Donc $C^{-1} = C'/4$ et $\boldsymbol{\tau} = C'\mathbf{e}$, soit

$$
\begin{bmatrix} \tau(-1,-1) \\ \tau(\ \ 1,-1) \\ \tau(-1,\ \ 1) \\ \tau(\ \ 1,\ \ 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e(\mathbf{1}) \\ e(A_1) \\ e(B_1) \\ e(A_1 B_1) \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{\tau} = \qquad C' \qquad \mathbf{e}
$$

ou

$$
\boldsymbol{\tau} = A_0 \otimes B_0\; e(\mathbf{1}) + A_1 \otimes B_0\; e(A_1) + A_0 \otimes B_1\; e(B_1) + A_1 \otimes B_1\; e(A_1 B_1)
$$

ou encore

$$
\tau(i,j) = e(\mathbf{1}) + A_1(i)\; e(A_1) + B_1(j)\; e(B_1) + A_1(i) B_1(j)\; e(A_1 B_1)
$$

——— Cas 3×2 ———

$$
\begin{array}{c}
A \\ 1 \\ 2 \\ 3
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} A_0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} A_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} A_2 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc|cc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} \\
 & & -1 & 1 \\ \cline{3-4}
 & 1 & \tau(1,-1) & \tau(1,1) \\
A & 2 & \tau(2,-1) & \tau(2,1) \\
 & 3 & \tau(3,-1) & \tau(3,1) \\ \cline{3-4}
 & & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{\tau}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|cc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B_0} \\
 & & 1 & 1 \\ \cline{3-4}
 & 1 & 1 & 1 \\
A_0 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 \\ \cline{3-4}
 & & \multicolumn{2}{c}{A_0 \otimes B_0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B_0} \\
 & & 1 & 1 \\ \cline{3-4}
 & 1 & 1 & 1 \\
A_1 & -1 & -1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{3-4}
 & & \multicolumn{2}{c}{A_1 \otimes B_0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B_0} \\
 & & 1 & 1 \\ \cline{3-4}
 & -1 & -1 & -1 \\
A_2 & -1 & -1 & -1 \\
 & 2 & 2 & 2 \\ \cline{3-4}
 & & \multicolumn{2}{c}{A_2 \otimes B_0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|cc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B_1} \\
 & & -1 & 1 \\ \cline{3-4}
 & 1 & -1 & 1 \\
A_0 & 1 & -1 & 1 \\
 & 1 & -1 & 1 \\ \cline{3-4}
 & & \multicolumn{2}{c}{A_0 \otimes B_1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B_1} \\
 & & -1 & 1 \\ \cline{3-4}
 & 1 & -1 & 1 \\
A_1 & -1 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{3-4}
 & & \multicolumn{2}{c}{A_1 \otimes B_1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B_1} \\
 & & -1 & 1 \\ \cline{3-4}
 & -1 & 1 & -1 \\
A_2 & -1 & 1 & -1 \\
 & 2 & -2 & 2 \\ \cline{3-4}
 & & \multicolumn{2}{c}{A_2 \otimes B_1}
\end{array}
$$

Chaque produit tensoriel $A_i \otimes B_j$ a 6 coordonnées indicées par les couples (A,B) de niveaux $\{(1,-1), (2,-1), (3,-1), (1,1), (2,1), (3,1)\}$. La coordonnée indicée par (A,B) est

$$(A_i \otimes B_j)(A,B) = A_i(A)B_j(B)$$

Effet associé – exemple $(\mathbf{A_0 B_1}) = \mathbf{e}(\mathbf{B_1})$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \tau(1,-1) & \tau(1,1) \\ \tau(2,-1) & \tau(2,1) \\ \tau(3,-1) & \tau(3,1) \end{bmatrix}$$

multiplier terme à terme, sommer, diviser par 6

$$\longrightarrow e(B_1) = [-\tau(1,-1) - \tau(2,-1) - \tau(3,-1) + \tau(1,1) + \tau(2,1) + \tau(3,1)]/6$$

$$e(A_i B_j) = \langle A_i \otimes B_j, \boldsymbol{\tau} \rangle$$

Matriciellement

$$\begin{bmatrix} e(A_0B_0) \\ e(A_1B_0) \\ e(A_2B_0) \\ e(A_2B_1) \\ e(A_2B_1) \\ e(A_2B_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tau(1,-1) \\ \tau(2,-1) \\ \tau(3,-1) \\ \tau(1,\ 1) \\ \tau(2,\ 1) \\ \tau(3,\ 1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} \quad = \frac{1}{6} \quad C \quad \boldsymbol{\tau}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\tau} = 6\, C^{-1}\mathbf{e}$$

$$CC' = D \qquad \text{où } D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$CC'D^{-1} = \mathbf{I} \Longrightarrow C^{-1} = C'D^{-1} \quad \text{donc}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 6C'D^{-1}\mathbf{e} \quad \text{soit}$$

$$\begin{bmatrix} \tau(1,-1) \\ \tau(2,-1) \\ \tau(3,-1) \\ \tau(1,\ \ 1) \\ \tau(2,\ \ 1) \\ \tau(3,\ \ 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e(A_0B_0) \\ \frac{3}{2}e(A_1B_0) \\ \frac{1}{2}e(A_2B_0) \\ e(A_0B_1) \\ \frac{3}{2}e(A_1B_1) \\ \frac{1}{2}e(A_2B_1) \end{bmatrix} \qquad \text{soit}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = {} & A_0 \otimes B_0\ e(\mathbf{1}) + \frac{3}{2}\ A_1 \otimes B_0\ e(A_1B_0) + \frac{1}{2}A_2 \otimes B_0\ e(A_2B_0) \\ & + A_0 \otimes B_1\ e(A_0B_1) + \frac{3}{2}A_1 \otimes B_1\ e(A_1B_1) + \frac{1}{2}A_2 \otimes B_1\ e(A_2B_1) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \tau(i,j) = {} & e(\mathbf{1}) + \frac{3}{2}A_1(i)\ e(A_1) + \frac{1}{2}A_2(i)\ e(A_2) \\ & +\ B_1(j)\ e(B_1) + \frac{3}{2}A_1(i)B_1(j)\ e(A_1B_1) + \frac{1}{2}A_2(i)B_1(j)\ e(A_2B_1) \end{aligned}$$

$$\text{Calculer } \boldsymbol{\tau} \text{ lorsque } \begin{bmatrix} e(\mathbf{1}) \\ e(A_1) \\ e(A_2) \\ e(B_1) \\ e(A_1B_1) \\ e(A_2B_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Normalisation des effets

$$
\begin{array}{c}
A\\ 1\\ 2\\ 3
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} A_0 \\ \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\end{array}
\quad
\begin{array}{c} A_1 \\ \begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}\end{array}
\quad
\begin{array}{c} A_2 \\ \begin{bmatrix} -1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\end{array}
\xrightarrow{\text{normalisation}}
\begin{array}{c} A_0 \\ \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\end{array}
\quad
\begin{array}{c} A_1 \\ \begin{bmatrix} \sqrt{3/2}\\ -\sqrt{3/2}\\ 0\end{bmatrix}\end{array}
\quad
\begin{array}{c} A_2 \\ \begin{bmatrix} -\sqrt{1/2}\\ -\sqrt{1/2}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & B_1 \\
 & \begin{array}{rr} -1 & 1 \end{array} \\
A_1 \begin{array}{r} \sqrt{3/2} \\ -\sqrt{3/2} \\ 0 \end{array} & \boxed{\begin{array}{rr} -\sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \\ \sqrt{3/2} & -\sqrt{3/2} \\ 0 & 0 \end{array}} \\
 & A_1 \otimes B_1
\end{array}
\qquad \cdots
$$

Après normalisation, les 6 “vecteurs” $A_0 \otimes B_0$, $A_1 \otimes B_0$, $A_2 \otimes B_0$, $A_0 \otimes B_1$, $A_1 \otimes B_1$, $A_2 \otimes B_1$ sont orthogonaux de même norme : 6.

La formule donnant $\boldsymbol{\tau}$ en fonction des effets devient

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = {} & A_0 \otimes B_0 \; e(\mathbf{1}) + A_1 \otimes B_0 \; e(A_1B_0) + A_2 \otimes B_0 \; e(A_2B_0) \\
& + A_0 \otimes B_1 \; e(A_0B_1) + A_1 \otimes B_1 \; e(A_1B_1) + A_2 \otimes B_1 \; e(A_2B_1)
\end{aligned}
$$

ou encore

$$\tau(i,j) = e(\mathbf{1}) + A_1(i)\ e(A_1) + A_2(i)\ e(A_2) + B_1(j)\ e(B_1) \\ + A_1(i)B_1(j)\ e(A_1B_1) + A_2(i)B_1(j)\ e(A_2B_1)$$

Ainsi

$$\tau(2,-1) = e(\mathbf{1}) - \sqrt{3/2}\ e(A_1) + -\sqrt{1/2}\ e(A_2) \\ -\ e(B_1) + \sqrt{3/2}\ e(A_1B_1) + \sqrt{1/2}\ e(A_2B_1)$$

Intérêt de cette normalisation

Les effets sont comparables entre eux, de même qu'en régression multiple les coefficients sont comparables lorsque les variables explicatives sont réduites (i.e. ramenées au même écart-type 1)

L'égalité donnant $\boldsymbol{\tau}$ en fonction des effets est réécrite ci-dessous sous une forme montrant l'analogie avec la régression.

$$\begin{bmatrix} \tau(1,-1) \\ \tau(2,-1) \\ \tau(3,-1) \\ \tau(1,\ \ 1) \\ \tau(2,\ \ 1) \\ \tau(3,\ \ 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(\mathbf{1}) + \begin{bmatrix} \sqrt{3/2} \\ -\sqrt{3/2} \\ 0 \\ \sqrt{3/2} \\ -\sqrt{3/2} \\ 0 \end{bmatrix} e(A_1B_0) + \begin{bmatrix} -\sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} e(A_2B_0) + \\ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(B_1) + \begin{bmatrix} -\sqrt{3/2} \\ \sqrt{3/2} \\ 0 \\ \sqrt{3/2} \\ -\sqrt{3/2} \\ 0 \end{bmatrix} e(A_1B_1) + \begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} e(A_2B_1)$$

Calcul de moyennes

Moyennes par niveau de A :

$$\tau(i,\bullet) = e(\mathbf{1}) + \frac{3}{2}A_1(i)\ e(A_1) + \frac{1}{2}A_2(i)\ e(A_2)$$

car $B_1(\bullet) = \sum_j B_1(j) = 0$.

Règle : : pour calculer les moyennes par niveaux de A, on peut ignorer les termes où apparaissent des facteurs autres que A.

Autre exemple: Fraction $1/16$ d'un 4×2^8. Le facteur A a 4 niveaux et est décomposée en A_1, A_2.

La réponse Y_1 a été artificiellement construite a partir des effets pour faciliter les calculs. La réponse Y est obtenue en rajoutant une erreur normale d'écart-type 1 à Y_1.

Détermination matricielle des confusions d'effet

$$E(\mathbf{y}) = X\boldsymbol{\beta}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_1 & & X_2 \end{tikzcd}$$

X_1 : colonnes de X indépendantes des colonnes à leur gauche

$$E(\mathbf{y}) = X\boldsymbol{\beta} = X_1\boldsymbol{\beta}_1 + X_2\boldsymbol{\beta}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'\,\mathbf{y}$$

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) = \boldsymbol{\beta}_1 + \underbrace{(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2}_{\substack{\text{matrice}\\ \text{d'alias}}}\ \boldsymbol{\beta}_2$$

f.e.b : lignes de $E\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1\right)$

effet estimable si . appartient à $\boldsymbol{\beta}_1$

. seul dans f.e.b associée

Exemple

$$
\begin{array}{c|cccc|cc|}
 & 1 & A & B & C & AC & BC \\
\hline
y_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
y_2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
y_3 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
y_4 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\mathbf{y} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{X_1} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{X_2}
$$

$$
X_1'X_1 = 4\,\mathbf{I}, \qquad X_1'X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (X_1'X_1)^{-1}\ X_1'\,\mathbf{y}
$$

$$
\begin{bmatrix} \hat{e}(\mathbf{1}) \\ \hat{e}(A) \\ \hat{e}(B) \\ \hat{e}(C) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \quad X_1'\,\mathbf{y}
$$

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) \quad = \quad \boldsymbol{\beta}_1 \quad + \quad (X_1'X_1)^{-1} \quad X_1'X_2 \quad \boldsymbol{\beta}_2$$

$$\begin{bmatrix} E(\hat{e}(\mathbf{1})) \\ E(\hat{e}(A)) \\ E(\hat{e}(B)) \\ E(\hat{e}(C)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(\mathbf{1}) \\ e(A) \\ e(B) \\ e(C) \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(AC) \\ e(BC) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} E(\hat{e}(\mathbf{1})) &= e(\mathbf{1}) \\ E(\hat{e}(A)) &= e(A) + e(BC) \\ E(\hat{e}(B)) &= e(B) + e(AC) \\ E(\hat{e}(C)) &= e(C) \end{aligned}$$

```
              Analyse avec ANALYS

              fichier EFFCONF.DAT
               A   B   C
               1   1   1
               1  -1  -1
              -1   1  -1
              -1  -1   1

           Modele : 1+A+B+C+A.C+B.C

 Matrice X

    A  B  C  A  B
             .  .
             C  C

 1  1  1  1  1  1
 1  1 -1 -1 -1  1
 1 -1  1 -1  1 -1
 1 -1 -1  1 -1 -1

ATTENTION ; matrice X'X non inversible

Le modele est reparametrise ...

 1   +
 2   + A + B.C
 3   + B + A.C
 4   + C
```