Plans d'expériences. A Kobilinsky, 25 Janvier 1995

Labo de Biométrie.
INRA. Route de St-Cyr.
F78026 VERSAILLES Cedex.

1 Caractères du groupe des traitements

Les traitements sont identifiés aux $n = n_1 \times \cdots \times n_s$ éléments du groupe produit $T = (n_1) \times \cdots \times (n_s)$ où (n_i), le groupe cyclique additif d'ordre n_i, est utilisé pour représenter les niveaux du $i$ème facteur A_i. Si M est un multiple commun de $n_1, \ldots, n_s$, ces niveaux peuvent tous être plongés dans le même groupe cyclique d'ordre M, qui est représenté soit par (M), le groupe additif des entiers modulo M, soit par R_M le groupe multiplicatif des racines Mème de l'unité dans $\mathbb{C}$. Ce plongement associe au niveau t_i dans (n_i) soit l'élément $t_i M/n_i$ de (M), soit l'élément $\exp(t_i 2\pi\mathrm{i}/n_i)$ de R_M. Ce dernier est égal à $\eta^{t_i M/n_i}$ où η est la racine primitive Mième de l'unité définie par

$$\eta = \exp(2\pi\mathrm{i}/M) \ . \tag{1}$$

Les facteurs sont considérés comme des applications de T dans (M) ou R_M, et on parle suivant le cas de notation additive ou multiplicative.

Ainsi si $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_s)$ est un traitement dans T, $A_i(\mathbf{t})$ est le niveau correspondant du facteur A_i dans (M) ou R_M :

$$A_i(\mathbf{t}) = \frac{M}{n_i} t_i \quad \text{dans } (M) \text{ (notation additive), ou} \tag{2}$$

$$A_i(\mathbf{t}) = \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{n_i} t_i\right) \quad \text{dans } R_M \text{ (notation multiplicative).} \tag{3}$$

Un caractère irréductible A de T est un morphisme de T dans le groupe cyclique d'ordre M, c'est à dire dans (M) ou R_M. Comme on utilise ici que des caractères irréductibles, on omet le qualificatif irréductible et on appellera plus simplement caractère un tel morphisme.

L'opération du groupe cyclique (M) ou R_M induit une opération similaire sur les caractères. Ainsi la somme $A + B$ (resp. le produit AB) de deux caractères est défini par

$$(A + B)(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t}) + B(\mathbf{t}) \ . \tag{4}$$

$$\text{resp.} \ \ (AB)(\mathbf{t}) = A(\mathbf{t})B(\mathbf{t}) \tag{5}$$

Muni de cette opération, l'ensemble des caractères est un groupe abélien appelé le *groupe dual* de T et noté T^*.

Il est facile de montrer que les facteurs A_i sont des caractères. La proposition suivante montre que tous les caractères peuvent s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire dans le cas additif, ou produit de puissances dans le cas multiplicatif, des facteurs.

Proposition 1.1 *L'application* $(a_1, \dots, a_s) \mapsto a_1 A_1 + \dots + a_s A_s$ *(resp.* $A_1^{a_1} \cdots A_s^{a_s}$*) est un isomorphisme de* $(n_1) \times \dots \times (n_s)$ *sur* T^*.

Démonstration. Soit $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s$ les générateurs canoniques de T:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad \mathbf{e}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'image d'un traitement $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s)^{\mathrm{t}} = t_1 \mathbf{e}_1 + \dots + t_s \mathbf{e}_s$ par un morphisme A de T dans (M) est

$$A(\mathbf{t}) = t_1 A(\mathbf{e}_1) + \dots + t_s A(\mathbf{e}_s).$$

Comme pour tout i, $n_i \mathbf{e}_i = 0$, on a $n_i A(\mathbf{e}_i) = 0$. Il existe donc un entier a_i défini modulo n_i, c'est à dire appartenant à (n_i), tel que $A(\mathbf{e}_i) = a_i M / n_i$.

On a pour tout $\mathbf{t}$

$$A(\mathbf{t}) = a_1 t_1 M/n_1 + \dots + a_s t_s M/n_s = a_1 A_1(\mathbf{t}) + \dots + a_s A_s(\mathbf{t}),$$

et donc

$$A = a_1 A_1 + \dots + a_s A_s \; .$$

L'unicité des a_i résulte de l'égalité $A(\mathbf{e}_i) = a_i M/n_i$ qui définit sans ambiguité a_i modulo n_i à partir du morphisme A. □

Chaque caractère A peut donc être considéré comme un nouveau facteur, dérivé des facteurs initiaux $A_1, \dots, A_s$. Ces derniers seront appelés *facteurs ou caractères de base.*

Les caractères *multiplicatif* ont une propriété très importante.

Proposition 1.2 *Les caractères multiplicatifs du groupe* T *forment une base orthogonale de* $\mathbb{C}^T$ *pour le produit scalaire usuel et le carré de leur norme est constant, égal au cardinal* n *de* T.

Ainsi si A et B sont des caractères distincts

$$\langle A, B \rangle = \sum_{\mathbf{t} \in T} A(\mathbf{t}) \overline{B(\mathbf{t})} = 0 \tag{6}$$

$$\langle A,A\rangle = \sum_{\mathbf{t}\in T} |A(\mathbf{t})|^2 = n \tag{7}$$

Noter que $\mathbb{C}^T$ est l'ensemble des vecteurs $(x_t)_{t\in T}$ à coordonnées dans $\mathbb{C}$ indexés par les éléments de T. Un tel vecteur s'identifie à une application $t \mapsto x_t$ de T dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle A,B\rangle &= \sum_{\mathbf{t}\in T} A(\mathbf{t})\overline{B(\mathbf{t})} \\
&= \sum_{t_1,\dots,t_s} \prod_i \exp\left(a_i t_i 2\pi \mathrm{i}/n_i\right) \prod_i \exp\left(-b_i t_i 2\pi \mathrm{i}/n_i\right) \\
&= \sum_{t_1,\dots,t_s} \prod_i \exp\left((a_i - b_i) t_i 2\pi \mathrm{i}/n_i\right) \\
&= \prod_i \sum_{t_i\in(n_i)} \exp\left((a_i - b_i) t_i 2\pi \mathrm{i}/n_i\right)
\end{aligned}$$

Fixons i et posons $\rho = \exp\left((a_i - b_i) 2\pi \mathrm{i}/n_i\right)$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{t_i\in(n_i)} \exp\left((a_i - b_i) t_i 2\pi \mathrm{i}/n_i\right) &= \sum_{t_i\in(n_i)} \rho^{t_i} \\
&= \rho^0 + \rho^1 + \cdots + \rho^{n_i - 1} \\
&= n_i \quad \text{si } a_i = b_i \pmod{n_i} \\
&= \frac{\rho^{n_i} - 1}{\rho - 1} = 0 \quad \text{si } a_i \neq b_i \pmod{n_i}.
\end{aligned}$$

La proposition en résulte. $\square$

Labo de Biométrie.
INRA. Route de St-Cyr.
F78026 VERSAILLES Cedex.

Exemple : Les tableaux 1 et 2 donnent les caractères multiplicatifs et additifs des groupes $(2) \times (2)$ et $(2) \times (3)$. Dans ce dernier, η est la racine primitive 6ème de l'unité définie par $\eta = \exp(2\pi \mathrm{i}/6)$. Noter que $\eta^0 = 1$, $\eta^3 = -1$ si bien que les colonnes $\mathbf{1}$ et A_1 sont réelles, formées de 1 pour la première, de 1 et -1 por la seconde. A titre d'exercice, vérifiez l'orthogonalité de ces caractères.

élts de T		carac. add. dans $(2)^T$				carac. mult. dans $\mathbb{C}^T$			
		0	A_1	A_2	A_1+A_2	$\mathbf{1}$	A_1	A_2	A_1A_2
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	-1	-1
1	0	0	1	0	1	1	-1	1	-1
1	1	0	1	1	0	1	-1	-1	1

TAB. 1 – *Caractères du groupe* $T = (2)^2$

élts de T		carac. add. dans $(6)^T$						carac. mult. dans $\mathbb{C}^T$					
		0	A_2	$2A_2$	A_1	A_1+A_2	A_1+2A_2	$\mathbf{1}$	A_2	A_2^2	A_1	A_1A_2	$A_1A_2^2$
0	0	0	0	0	0	0	0	η^0	η^0	η^0	η^0	η^0	η^0
0	1	0	2	4	0	2	4	η^0	η^2	η^4	η^0	η^2	η^4
0	2	0	4	2	0	4	2	η^0	η^4	η^2	η^0	η^4	η^2
1	0	0	0	0	3	3	3	η^0	η^0	η^0	η^3	η^3	η^3
1	1	0	2	4	3	5	1	η^0	η^2	η^4	η^3	η^5	η^1
1	2	0	4	2	3	1	5	η^0	η^4	η^2	η^3	η^1	η^5

TAB. 2 – *Caractères du groupe* $T = (2) \times (3)$ *avec* $\eta = \exp(2\pi \mathrm{i}/6)$.

2 Effets factoriels associés aux caractères

Soit $\tau = (\tau(\mathbf{t}))_{\mathbf{t} \in T}$ le vecteur $n \times 1$ des effets des traitements. C'est à dire que $\tau(\mathbf{t})$ est l'espérance de la réponse y lorsqu'on expérimente avec le traitement $\mathbf{t}$:

$$E(y \mid \mathbf{t}) = \tau(\mathbf{t}) \tag{8}$$

La décomposition de ce vecteur sur la base orthogonale des caractères de T s'écrit

$$\tau = \sum_{A \in T^*} e(A)A \tag{9}$$

En effectuant le produit scalaire par un caractère et tenant compte de l'orthogonalité des caractères, on trouve l'expression des coefficients :

$$e(A) = \langle \tau,A \rangle /n = \sum_{\mathbf{t} \in T} \tau(\mathbf{t})\overline{A(\mathbf{t})}/n \; . \tag{10}$$

Les caractères ont dans cette expression leur forme multiplicative à valeur dans R_M. La forme linéaire $e(A)$ de τ est appelée *paramètre canonique*, ou *effet factoriel*, ou plus simplement *contraste* associé à A. S'il n'y a pas de confusion possible, on parle de l'effet ou du contraste A pour désigner l'effet factoriel $e(A)$.

L'effet factoriel associé à $\mathbf{1}$ est la moyenne générale des effets traitements. Les effets factoriels associés aux $n_i - 1$ puissances non nulles de A_i: $A_i, \ldots , A_i^{n_i-1}$, engendrent ce qu'on appelle l'*effet principal* du facteur A_i. De même les $(n_i-1)\times(n_j-1)$ effets associés aux caractères $A_i^{a_i}A_j^{a_j}$ où $a_i = 1,\ldots ,n_i-1$, $a_j = 1,\ldots ,n_j-1$, engendrent l'interaction A_iA_j entre les facteurs A_i et A_j. Plus généralement, les $(n_{i_1}-1)\cdots(n_{i_k}-1)$ effets factoriels associés aux caractères $A_{i_1}^{a_{i_1}}\cdots A_{i_k}^{a_{i_k}}$, où $a_{i_1} \in (n_{i_1}), \ldots , a_{i_k} \in (n_{i_k})$ sont tous différents de 0, engendrent l'interaction $A_{i_1}\cdots A_{i_k}$ entre les k facteurs $A_{i_1}, \ldots , A_{i_k}$.

On a

$$\begin{aligned}
e(A_1^{a_1}) &= \frac{1}{n}\sum_{\mathbf{t}\in T}\tau(\mathbf{t})\overline{A_1^{a_1}(\mathbf{t})} \\
&= \frac{1}{n_1n_2\cdots n_s}\sum_{t_1,\ldots,t_s}\tau(t_1,\ldots,t_s)\exp(-2\pi \mathrm{i} a_1t_1/n_1) \\
&= \frac{1}{n_1}\sum_{t_1}\exp(-2\pi \mathrm{i} a_1t_1/n_1)\frac{1}{n_2\cdots n_s}\sum_{t_2,\ldots,t_s}\tau(t_1,t_2,\ldots,t_s) \\
&= \frac{1}{n_1}\sum_{t_1}\exp(-2\pi \mathrm{i} a_1t_1/n_1)\tau(t_1,\bullet,\ldots,\bullet)
\end{aligned}$$

où les points dans la dernière expression indique qu'on a fait la moyenne sur les indices correspondants $t_2, \ldots , t_s$:

$$\tau(t_1,\bullet,\ldots,\bullet) = \frac{1}{n_2\cdots n_s}\sum_{t_2,\ldots,t_s}\tau(t_1,t_2,\ldots,t_s) \; .$$

Autrement dit, un effet $A_1^{a_1}$ est combinaison linéaire des moyennes des effets traitements par niveau de A_1. Si cet effet appartient à l'effet principal A_1, $a_1 \neq 0 \pmod{n_1}$ et la somme des coefficients est nulle :

$$\sum_{t_1\in(n_1)}\exp(-2\pi \mathrm{i} a_1t_1/n_1) = 0 \; .$$

Ce résultat résulte de l'othogonalité entre les caractères $\mathbf{1}$ et A_1 du groupe (n_1). Il peut se démontrer directement en remarquant qu'il s'agit de la somme d'une progression géométrique de raison $\rho = \exp(-2\pi \mathrm{i} a_1/n_1)$ différente de 1.

De façon similaire on montre que

$$e(A_1^{a_1} A_2^{a_2}) = \sum_{t_1,t_2} \exp(-2\pi \mathrm{i} a_1 t_1/n_1) \exp(-2\pi \mathrm{i} a_2 t_2/n_2) \tau(t_1,t_2,\bullet,\dots,\bullet) \ .$$

Un tel effet est donc combinaison linéaire des moyennes des effets traitements pour les différents couples de niveaux (t_1,t_2) des facteurs A_1 et A_2. S'il appartient effectivement à l'interaction A_1A_2, c'est à dire si a_1 et a_2 sont non nuls modulo n_1 et n_2 respectivement, les sommes à t_1 ou t_2 fixé des coefficients sont nulles :

$$\sum_{t_1 \in (n_1)} \exp(-2\pi \mathrm{i} a_1 t_1/n_1) \exp(-2\pi \mathrm{i} a_2 t_2/n_2) = 0 \ .$$

$$\sum_{t_2 \in (n_2)} \exp(-2\pi \mathrm{i} a_1 t_1/n_1) \exp(-2\pi \mathrm{i} a_2 t_2/n_2) = 0 \ .$$

Si $n_1 = 2$ et $a_1 = 1$, l'effet $A_1^{a_1}$ s'écrit

$$e(A_1) = \Big(\tau(0,\bullet,\dots,\bullet) - \tau(1,\bullet,\dots,\bullet)\Big)/2 \ .$$

Si $n_1 = n_2 = 2$ et $a_1 = a_2 = 1$, l'effet $A_1^{a_1} A_2^{a_2}$ s'écrit

$$e(A_1A_2) = \Big(\tau(0,0,\bullet,\dots,\bullet) - \tau(1,0,\bullet,\dots,\bullet) - \tau(0,1,\bullet,\dots,\bullet) + \tau(1,1,\bullet,\dots,\bullet)\Big)/4 \ .$$

Ces expressions s'interprètent bien et les lecteurs familiers de l'analyse de variance y retrouveront les formes auxquelles ils sont habitués.

3 Plan régulier défini par un morphisme de groupe

Dans ce paragraphe, les unités expérimentales sont représentées par un groupe produit $U = (m_1) \times \cdots \times (m_r)$. Le plan d'expérience est défini par une application ϕ de U dans T, c'est à dire que le traitement $\mathbf{t} \in T$ affecté à une unité expérimentale $u \in U$ est $\mathbf{t} = \phi(\mathbf{u})$. On se restreint ici aux applications de type affine, c'est à dire telles que

$$\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{t}_0 + \Phi\mathbf{u} \tag{11}$$

où $\mathbf{t}_0$ est un élément fixe de T et Φ un morphisme du groupe U dans le groupe T, c'est à dire une application vérifiant, pour toute paire $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ d'éléments de U

$$\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{v}) \ .$$

La fraction des traitements expérimentés est obtenue en ajoutant $\mathbf{t}_0$ à l'image $\operatorname{Im}\Phi = \{\Phi(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in U\}$ du morphisme Φ. C'est donc une classe d'équivalence du sous groupe $\operatorname{Im}\Phi$.

Si $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \Phi(\mathbf{u})$ est un traitement dans cette classe, l'ensemble des autres unités $\mathbf{v}$ qui reçoivent ce même traitement est

$$\{\mathbf{v} \mid \Phi(\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u})\} = \mathbf{u} + \operatorname{Ker}\Phi \ .$$

C'est donc une classe d'équivalence du sous groupe $\operatorname{Ker}\Phi = \{\mathbf{u} \mid \Phi(\mathbf{u}) = 0\}$, noyau du morphisme Φ. Ces classes d'équivalences comportent toutes le même nombre d'unités égal au cardinal $\mid \operatorname{Ker}\Phi \mid$ du noyau. En particulier si Φ est injective, chaque traitement de la fraction $\mathbf{t}_0 + \operatorname{Im}\Phi$ est expérimenté une fois. On dit dans ce cas que le plan est une *fraction régulière* de T.

Si le plan est défini par l'application *"affine"* ϕ donnée en (11), l'espérance de la réponse sur l'unité $\mathbf{u}$

$$E\left(y(\mathbf{u})\right) = \tau(\phi(\mathbf{u}))$$

s'écrit, en utilisant la décomposition (9),

$$\begin{aligned} E\left(y(\mathbf{u})\right) &= \sum_{A \in T^*} e(A)A(\mathbf{t}_0 + \Phi\mathbf{u}) \\ &= \sum_{A} e(A)A(\mathbf{t}_0)A(\Phi\mathbf{u}) \end{aligned} \ .$$

L'espérance du vecteur y des réponses sur les $m = m_1 \times \cdots \times m_r$ unités de U est donc

$$E(y) = \tau \circ \phi = \sum_{A \in T^*} e(A)A(\mathbf{t}_0)A \circ \Phi \tag{12}$$

L'application composée $A \circ \Phi$ des deux morphismes A et Φ est un morphisme de U dans R_M, c'est à dire un caractère du groupe U. En groupant dans la somme les caractères A qui donnent en les composant par Φ un même caractère C de U^*, on obtient

$$E(y) = \sum_{C \in U^*} \gamma(C)C \tag{13}$$

où

$$\gamma(C) = \sum_{A:A\circ\Phi=C} A(\mathbf{t}_0)e(A)\ . \tag{14}$$

En pratique, on fait l'hypothèse que certains effets, par exemple les interactions de trois facteurs et plus, sont nuls. Les effets $e(A)$ associés sont alors nuls. Si l'expression (14) de $\gamma(C)$ ne contient que des effets nuls, $\gamma(C)$ est nul. La sommation dans (13) peut être restreinte aux C de U^* tels que $\gamma(C)$ n'est pas nul.

On va voir que chaque $\gamma(C)$ non nul peut être estimé sans biais à partir de y. En revanche si son expression fait apparaître plusieurs effets $e(A)$ non nuls, il est impossible d'estimer séparément ces effets qui sont dit confondus.

Définition 3.1 Effets factoriels confondus. *Les effets factoriels $e(A)$ apparaissant dans* (14) *sont dit* confondus *sur U (avec $\gamma(C)$). On dit aussi que les caractères A correspondants sont confondus (avec C).*

On peut aussi dire, compte tenu des remarques déjà faites sur la notation des effets factoriels, que les effets A dans (14) sont confondus sur U (avec C). Le contexte permet généralement d'omettre la référence à U.

On parle parfois d'*alias* au lieu d'*effets confondus*. Ce mot est un peu trompeur. Usuellement il est utilisé pour désigner des appellations distinctes d'une même entité. Ici les effets confondus sont des entités bien différentes, mais non estimable séparément sur le plan défini par ϕ.

Les effets (caractères) de T^* confondus avec $C \in U^*$ sont ceux qui ont C comme image par l'application $\Phi^* : A \mapsto A \circ \Phi$. Il est aisé de vérifier que cette application est un morphisme de T^* dans U^*, qui est appelé *dual de* Φ et noté Φ^*.

Si l'on connait un effet A_C confondu avec C, c'est à dire vérifiant $\Phi^*(A_C) = A_C \circ \Phi = C$, les autres effets confondus avec C forment la classe d'équivalence $A_C \operatorname{Ker}\Phi^*$ ($A_C + \operatorname{Ker}\Phi^*$ en notation additive) du noyau $\operatorname{Ker}\Phi^*$ de Φ^*. Nous verrons plus loin un cas de figure où ce noyau s'obtient simplement.

La proposition suivante permet d'obtenir les coefficients $A(\mathbf{t}_0)$ des effets dans l'expression (14) de $\gamma(C)$.

Proposition 3.1 *A est confondu avec C si et si seulement $A \circ \phi$ est multiple de C : $A \circ \phi = \alpha C$. Le coefficient $A(\mathbf{t}_0)$ figurant dans l'expression (14) de $\gamma(C)$ est alors égal au coefficient α de proportionnalité.*

Démonstration. Si $A \circ \Phi = C$, on a $A \circ \phi = A(\mathbf{t}_0)C$. Réciproquement, si $A \circ \phi = \alpha C$, alors $A(\mathbf{t}_0)A \circ \Phi = \alpha C$. Les caractères C et $A \circ \Phi$ étant colinéaires sont nécessairement égaux et $A(\mathbf{t}_0) = A(\mathbf{t}_0)A \circ \Phi(0) = \alpha C(0) = \alpha$. □.

Exemple 1 . $U = (2)^3 = (2) \times (2) \times (2)$, $T = (2)^5$. L'application ϕ est définie par les égalités

$$A_1 \circ \phi = C_1, \quad A_2 \circ \phi = C_2, \quad A_3 \circ \phi = C_3$$

$$A_4 \circ \phi = 1 + C_1 + C_2, \quad A_5 \circ \phi = 1 + C_1 + C_3$$

$$(\ A_4 \circ \phi = -C_1C_2, \quad A_5 \circ \phi = -C_1C_3 \quad \text{en multiplicatif}\ )\ .$$

C_1, C_2, C_3 sont ici les caractères de base du groupe U, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 les caractères de base du groupe T. Comme $m_1 = m_2 = m_3 = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 2$, on peut prendre $M = 2$. En notation additive on a alors, si $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{t} = (t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)$:

$$C_1(\mathbf{u}) = u_1, \quad C_2(\mathbf{u}) = u_2, \quad C_3(\mathbf{u}) = u_3$$

$$A_1(\mathbf{t}) = t_1, \quad A_2(\mathbf{t}) = t_2, \quad A_3(\mathbf{t}) = t_3, \quad A_4(\mathbf{t}) = t_4, \quad A_5(\mathbf{t}) = t_5\ .$$

L'application ϕ est donc définie par

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{u}) &= \Big(A_1(\phi(\mathbf{u})),A_2(\phi(\mathbf{u})),A_3(\phi(\mathbf{u})),A_4(\phi(\mathbf{u})),A_5(\phi(\mathbf{u}))\Big) \\
&= \Big(C_1(\mathbf{u}),C_2(\mathbf{u}),C_3(\mathbf{u}),1 + C_1(\mathbf{u}) + C_2(\mathbf{u}),1 + C_1(\mathbf{u}) + C_3(\mathbf{u})\Big) \\
&= (u_1,u_2,u_3,1 + u_1 + u_2,1 + u_1 + u_3)
\end{aligned}$$

Elle est bien du type prescrit avec $t_0 = (0,0,0,1,1)$ et pour Φ le produit des morphismes C_1, C_2, C_3, $C_1 + C_2$, $C_1 + C_3$. Rappelons que ce dernier est défini par

$$\Phi(\mathbf{u}) = \Big(C_1(\mathbf{u}),C_2(\mathbf{u}),C_3(\mathbf{u}),C_1(\mathbf{u}) + C_2(\mathbf{u}),C_1(\mathbf{u}) + C_3(\mathbf{u})\Big)$$

D'après la proposition 3.1,

$$A_1 \circ \Phi = C_1, \quad A_2 \circ \Phi = C_2, \quad A_3 \circ \Phi = C_3, \quad A_4 \circ \Phi = C_1 + C_2, \quad A_5 \circ \Phi = C_1 + C_3$$

et donc

$$\Phi^* \left(A_4 - (A_1 + A_2)\right) = \Big(A_4 - (A_1 + A_2)\Big) \circ \Phi = 0\ ,$$

$$\Phi^* \left(A_5 - (A_1 + A_3)\right) = \Big(A_5 - (A_1 + A_5)\Big) \circ \Phi = 0\ .$$

Les deux caractères $A_4 - (A_1 + A_2)$, $A_5 - (A_1 + A_3)$, qui peuvent ici aussi s'écrire $A_1 + A_2 + A_4$, $A_1 + A_3 + A_5$, appartiennent donc à $\operatorname{Ker} \Phi^*$. Un résultat général donné plus loin (Proposition 3.3) montrent qu'ils sont cycliques d'ordre n_4 et n_5 (i.e. d'ordre 2) et engendrent le noyau. Le noyau est formé par ces deux éléments, leur somme et 0 :

$$\operatorname{Ker} \Phi^* = \Phi^{*-1}(0) = \{0,A_1 + A_2 + A_4,A_1 + A_3 + A_5,A_2 + A_3 + A_4 + A_5\}$$

D'après la proposition 1.1, tout caractère C de U^* se met sous la forme $C = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3$ avec $\mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3) \in (2)^3$. Il est clair que $A_C = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3$ a C pour image par Φ^*. Les autres caractères confondus avec C forment donc la classe d'équivalence $\Phi^{*-1}(C) = A_C + \operatorname{Ker}\Phi^*$. Par exemple, les effets confondus avec $C_1 + C_2$ sont obtenus en ajoutant $A_1 + A_2$ au noyau $\operatorname{Ker}\Phi^*$ de Φ^* :

$$\Phi^{*-1}(C_1 + C_2) = \{A_1 + A_2,\ A_4,\ A_2 + A_3 + A_5,\ A_1 + A_3 + A_4 + A_5\} .$$

Rappelons que l'addition s'effectue içi modulo $M = 2$. C'est pourquoi on a par exemple $A_1 + A_2 + A_1 + A_2 + A_4 = 2A_1 + 2A_2 + A_4 = A_4$.

En notation multiplicative, le noyau et l'ensemble d'éléments confondus ci-dessus s'écrivent :

$$\operatorname{Ker}\Phi^* = \{\mathbf{1},\ A_1A_2A_4,\ A_1A_3A_5,\ A_2A_3A_4A_5\}$$

$$\Phi^{*-1}(C_1C_2) = \{A_1A_2,\ A_4,\ A_2A_3A_5,\ A_1A_3A_4A_5\} .$$

Pour trouver les coefficients dans $\gamma(C_1C_2)$, on utilise à nouveau la proposition 3.1. Des égalités de définition écrites sous forme multiplicative, $A_1 \circ \phi = C_1$, $A_2 \circ \phi = C_2$, $A_3 \circ \phi = C_3$, $A_4 \circ \phi = -C_1C_2$, $A_5 \circ \phi = -C_1C_3$, on tire immédiatement $(-A_1A_2A_4) \circ \phi = \mathbf{1}$, $(-A_1A_3A_5) \circ \phi = \mathbf{1}$. On en déduit que

$$\mathbf{1} = (-A_1A_2A_4) \circ \phi = (-A_1A_3A_5) \circ \phi = (A_2A_3A_4A_5) \circ \phi$$

et en multipliant par $C_1C_2 = (A_1A_2) \circ \phi$ que

$$C_1C_2 = (A_1A_2) \circ \phi = (-A_4) \circ \phi = (-A_2A_3A_5) \circ \phi = (A_1A_3A_4A_5) \circ \phi .$$

On a en particulier $A_4 \circ \phi = -C_1C_2$ et le coefficient de $e(A_4)$ dans $\gamma(A_4)$ est -1. On trouve de même les autres coefficients dans $\gamma(C_1C_2)$ qui s'écrit

$$\gamma(C_1C_2) = e(A_1A_2) - e(A_4) - e(A_2A_3A_5) + e(A_1A_3A_4A_5) .$$

Remarque. En pratique, on omet souvent d'écrire la composition par ϕ. Les relations de définition précédentes deviennent donc

$$A_1 = C_1,\ A_2 = C_2,\ A_3 = C_3,\ A_4 = -C_1C_2,\ A_5 = -C_1C_3 .$$

Ces égalités signifient que les facteurs A_1, A_2, A_3 coincident <u>sur U</u> avec les facteurs de base C_1, C_2, C_3 et que A_4, A_5 coincident sur U avec $-C_1C_2$, $-C_1C_3$. On dit aussi que A_1, A_2, A_3 sont choisis comme facteurs de base des unités et que les facteurs A_4, A_5 sont définis par $A_4 = -A_1A_2$, $A_5 = -A_1A_3$. On a alors sur U

$$\mathbf{1} = -A_1A_2A_4 = -A_1A_3A_5 = A_2A_3A_4A_5 ,$$

$$A_1A_2 = -A_4 = -A_2A_3A_5 = A_1A_3A_4A_5 .$$

La combinaison linéaire $\gamma(C_1C_2)$ s'écrit sous la forme simplifiée

$$\gamma(A_1A_2) = A_1A_2 - A_4 - A_2A_3A_5 + A_1A_3A_4A_5 .$$

**

De façon plus générale, la fonction ϕ est entièrement définie dès que sont connues les applications composées $A_i \circ \phi$, pour $i = 1, \ldots, s$, puisque la coordonnée $i^{\text{ème}}$ de $\phi(\mathbf{u})$ est l'élément $n_i A_i(\phi(\mathbf{u}))/M$ de (n_i).

D'autre part $A_i \circ \phi = A_i(\mathbf{t}_0) + \Phi^*(A_i)$ et d'après la proposition 1.1 le caractère $\Phi^*(A_i)$ est combinaison linéaire des C_i. Soit $A_i(\mathbf{t}_0) = t_{0i}M/n_i$ et ϕ^*_{ji} les coefficients de cette combinaison (ϕ^*_{ji} est défini modulo m_j). On a

$$A_i \circ \phi = t_{0i}M/n_i + \sum_j \phi^*_{ji} C_j \ . \tag{15}$$

Donc tout morphisme ϕ peut être défini par des expressions de la forme (15). On ne peut cependant pas réciproquement choisir arbitrairement les coefficients ϕ^*_{ji} dans ces expressions, car la combinaison linéaire des C_j figurant à droite est un morphisme de U dans (M) dont l'image n'appartient pas nécessairement au sous groupe cyclique d'ordre n_i de M.

Pour qu'elle y appartienne, il faut et suffit que l'image de chacun des générateurs canoniques $e_1 = (1,0,\ldots 0)$, $\ldots$, $e_r = (0,\ldots,0,1)$ de U appartienne à ce sous groupe ou de façon équivalente que, pour tout j, $A_i \circ \Phi(e_j) = \phi^*_{ji} C_j(e_j) = \phi^*_{ji} M/m_j$ soit multiple modulo M de M/n_i. Ceci s'écrit encore

$$\phi^*_{ji} M/m_j = \lambda M/n_i + kM \ ,$$

$$\phi^*_{ji} = \lambda m_j/n_i + k m_j \ ,$$

où λ est un entier ad-hoc (qui doit en particulier être tel que $\lambda m_j/n_i$ est un entier).

La condition recherchée est donc que l'entier ϕ^*_{ji} soit multiple entier de m_j/n_i modulo m_j.

Proposition 3.2 *Les applications affines ϕ de la forme (11) sont définies par les égalités (15) pour lesquelles chaque coefficient ϕ^*_{ji} est multiple entier de m_j/n_i modulo m_j.*

Cas où les r premiers facteurs coincident sur U avec les facteurs de base des unités

La construction de l'exemple 1 peut être généralisée de la façon suivante. On suppose, pour $i = 1, \ldots, r$, que $n_i = m_i$ et que $A_i \circ \phi = C_i$. C'est à dire que les r premiers facteurs coincident sur U avec les facteurs de base. La condition de la proposition 3.2 est trivialement vérifiée pour ces r facteurs.

Pour $i > r$, on utilise une relation du type (15) vérifiant la condition de la proposition 3.2. Sous forme multiplicative, cette relation s'écrit

$$A_i \circ \phi = A_i(\mathbf{t}_0) \prod_{j=1}^{r} C_j^{\phi^*_{ji}}.$$

où $A_i(\mathbf{t}_0) = \exp(t_{0i} 2\pi \mathrm{i}/n_i)$.

Alors le noyau $\operatorname{Ker}\Phi^*$ est engendré par les $s - r$ caractères

$$F_i = \overline{A_i} \prod_{j=1}^{r} A_j^{\phi^*_{ji}} \ ,i = r+1, \dots ,s, \tag{16}$$

$$\left(F_i = -A_i + \sum_{j=1}^{r} \phi^*_{ji} A_j \ ,i = r+1, \dots ,s \quad \text{en notation additive}\right) \tag{17}$$

Plus précisément

Proposition 3.3 *L'application de* $(n_{r+1}) \times \ldots \times (n_s)$ *dans* T^* *définie par*

$$(f_{r+1}, \dots ,f_s) \mapsto F_{r+1}^{f_{r+1}} \dots F_s^{f_s}$$

est un isomorphisme du groupe produit $(n_{r+1}) \times \ldots (n_s)$ *sur le noyau* $\operatorname{Ker}\Phi^*$. *Pour tout caractère* $C = C_1^{f_1} \cdots C_r^{f_r}$

$$\gamma(C) = \sum_{f_{r+1}, \dots ,f_s} \overline{A}_{r+1}(\mathbf{t}_0)^{f_{r+1}} \cdots \overline{A}_s(\mathbf{t}_0)^{f_s} \, e\left(A_1^{f_1} \cdots A_r^{f_r} F_{r+1}^{f_{r+1}} \cdots F_s^{f_s}\right) \ .$$

Démonstration. Il résulte de la définition de ϕ et de la proposition 3.1 que les F_i, $i = r+1, \dots s$ sont dans le noyau de Φ^*.

Montrons que $n_i F_i = 0$.

$$n_i F_i = -n_i A_i + \sum_{j=1}^{r} n_i \phi^*_{ji} A_j \ .$$

Or $n_i A_i = 0$ et d'après la proposition 3.2, $n_i \phi^*_{ji}$ est multiple de $m_j = n_j$. Donc $n_i \phi^*_{ji} A_j = 0$ et $n_i F_i = 0$.

Le noyau du morphisme $f_i \mapsto f_i F_i$ de $\mathbb{Z}$ dans T^* contient $n_i \mathbb{Z}$ et induit donc un morphisme de $(n_i) = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ dans T^*. On en déduit facilement que l'application introduite dans la proposition est un morphisme (appelé généralement *coproduit* des morphismes $f_i \mapsto f_i F_i$ de (n_i) dans T^*).

L'image de $(f_{r+1}, \dots ,f_s)$ par ce morphisme se met sous la forme

$$\sum_{j=1}^{r} \delta_j A_j - \sum_{i=r+1}^{s} f_i A_i \ .$$

Sa nullité implique d'après la proposition 1.1 que $f_i = 0 \bmod n_i$ pour $i = r+1, \ldots, s$, ce qui prouve que le morphisme est injectif.

Rappelons (cf devoir n°1) que

$$\mid \operatorname{Ker} \Phi^* \mid = \frac{\mid T \mid}{\mid \operatorname{Im} \Phi \mid} .$$

Le morphisme Φ est injectif, car si $\Phi(\mathbf{u}) = 0$, alors $C_i(\mathbf{u}) = A_i(\Phi(u)) = 0$ pour $i = 1, \ldots r$. On a donc $\mid \operatorname{Im} \Phi \mid = n_1 \ldots n_r$ et $\mid \operatorname{Ker} \Phi^* \mid = n_{r+1} \ldots n_s$. L'application de la proposition étant injective, son image inclue dans $\operatorname{Ker} \Phi^*$ a aussi $f_{r+1} \ldots f_s$ pour cardinal et ne peut qu'être égale à $\operatorname{Ker} \Phi^*$.

On a $A_i(\mathbf{t}_0) = 1$ pour $i = 1, \ldots, r$ et donc $F_i(\mathbf{t}_0) = \overline{A}_i(\mathbf{t}_0)$ pour $i = r+1, \ldots, s$, d'où l'expression de $\gamma(C)$. $\square$.

Labo de Biométrie.
INRA. Route de St-Cyr.
F78026 VERSAILLES Cedex.

Estimation des combinaisons linéaires $\gamma(C)$

Le modèle (13) se réécrit sous la forme matricielle usuelle $E(y) = X\gamma$ où γ est le vecteur ayant les $\gamma(C)$ non nuls pour coordonnées et X la matrice ayant les caractères C associés pour colonnes.

Dans le cas de facteurs à 2 niveaux, les caractères C sont des vecteurs réels de -1 et 1. La théorie du modèle linéaire s'applique. Si on fait l'hypothèse que les observations sont non corrélées de même variance σ^2, le modèle s'écrit

$$E(y) = X\gamma \qquad \mathrm{var}(y) = \sigma^2\mathbf{I}\ . \tag{18}$$

L'estimateur des moindres carrés de γ est $\hat{\gamma} = (X'X)^{-}X'y$. Les caractères de U étant orthogonaux de norme $\sqrt{m}$ d'après (6) et (7, on a $X'X = m\mathbf{I}$. Toutes les coordonnées de γ sont donc estimables, $\hat{\gamma} = X'y/m$ et $\mathrm{var}(\gamma) = \frac{\sigma^2}{m}\mathbf{I}$. Pour les coordonnées, cela donne

$$\begin{gathered}\hat{\gamma}(C) = C'y/m = \langle y,C\rangle/m\ ,\quad \mathrm{var}\left(\hat{\gamma}(C)\right) = \sigma^2/m\ ,\\ \mathrm{cov}\Big(\hat{\gamma}(C),\hat{\gamma}(C')\Big) = 0 \quad \text{pour } C \neq C'\end{gathered} \tag{19}$$

Lorsque certains facteurs ont un nombre de niveaux différent de 2, les coordonnées des caractères C peuvent être complexes ainsi que les paramètres associés. On montre que la théorie du modèle linéaire s'applique dans ce cas à condition de remplacer la transposée X' par la transposée conjuguée $X^* = \overline{X}'$. Les propriétés d'orthogonalité des caractères donnent alors

$$X^*X = m\mathbf{I}\ . \tag{20}$$

L'estimateur des moindres carrés de γ et sa matrice de variance-covariance sont

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{m}X^*y \qquad \mathrm{var}\left(\hat{\gamma}\right) = \frac{\sigma^2}{m}\mathbf{I} \tag{21}$$

ce qui donne pour les coordonnées, si $C^* = \overline{C}'$,

$$\begin{gathered}\hat{\gamma}(C) = C^*y/m = \langle y,C\rangle/m \quad \mathrm{var}\left(\hat{\gamma}(C)\right) = \sigma^2/m\\ \mathrm{cov}\Big(\hat{\gamma}(C),\hat{\gamma}(C')\Big) = 0 \quad \text{pour } C \neq C'.\end{gathered} \tag{22}$$

La définition des covariances et variances pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{C}$ est la généralisation naturelle des notions équivalentes pour les variables aléatoires réelles :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(x_1,x_2) &= E\left[\left(x_1 - E(x_1)\right)\left(\overline{x_2 - E(x_2)}\right)\right] , &(23)\\
\operatorname{var}(x) &= \operatorname{cov}(x,x) \ . &(24)
\end{aligned}
$$

La covariance est une forme hermitienne. On a donc en particulier

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(\hat{\gamma}(C),\hat{\gamma}(C')\right) &= \operatorname{cov}\left(\sum_{\mathbf{u}} \overline{C}(\mathbf{u})y(\mathbf{u})/m, \sum_{\mathbf{u}} \overline{C'}(\mathbf{u})y(\mathbf{u})/m\right)\\
&= \sum_{\mathbf{u}} \overline{C}(\mathbf{u})C'(\mathbf{u}) \operatorname{var}\left(y(\mathbf{u})\right)/m^2 = \sigma^2 \left\langle C',C\right\rangle /m^2
\end{aligned}
$$

et (22) résulte immédiatement de l'orthogonalité des caractères. Les règles usuelles de calcul matriciel peuvent aussi être utilisées pour obtenir $\operatorname{var}(\hat{\gamma})$, à condition de remplacer la transposée de X par sa transposée conjuguée : $\operatorname{var}(\hat{\gamma}) = X^*(\sigma^2\mathbf{I})X/m^2 = \sigma^2\mathbf{I}/m$.

Les paramètres $\gamma(C)$ et $\gamma(\overline{C})$ associés à des caractères conjugués sont conjugués. Ceci résulte de (14), de la propriété analogue $e(A) = e(\overline{A})$ pour les effets factoriels, enfin de ce que les caractères A vérifiant $A \circ \Phi = \overline{C}$ sont les conjugués de ceux qui vérifient $A \circ \Phi = C$.

Noter que les effets $e(A)$ et $e(\overline{A})$ associés à des caractères conjugués appartiennent nécessairement à la même interaction ou au même effet principal. Ils sont donc simultanément supposés nuls ou non nuls. Il s'en suit que $\gamma(C)$ et $\gamma(\overline{C})$ sont aussi simultanément nuls ou non nuls. Les coordonnées non réelles de γ sont donc conjuguées par paires ainsi que les colonnes associées de X.

Soit p le nmbre de paramètres $\gamma(C)$ non nuls. Dans le cas où tous les n_i sont égaux à 2, le vecteur γ varie librement dans $\mathbb{R}^p$. Ce qui précède montre en revanche que si certains n_i sont différents de 2, γ ne varie pas librement dans $\mathbb{C}^p$. On peut montrer qu'il varie librement dans le sous-espace (réel) des vecteurs dont les coordonnées indicées par des caractères conjugués sont conjuguées.

Les paramètres d'intérêt ne sont pas ici directement les $\gamma(C)$ complexes, mais les combinaisons linéaires réelles que l'ont peut former à partir d'eux. On montre qu'une combinaison linéaire $\alpha = a^*\gamma$ est réelle si les coefficients de paramètres conjugués sont eux-même conjugués. L'estimation et la variance d'une telle combinaison s'obtiennent de la façon usuelle :

$$
\hat{\alpha} = a^*\hat{\gamma} \ , \quad \operatorname{var}(\hat{\alpha}) = a^* \operatorname{var}(\hat{\gamma})a
$$

Les plus simples des combinaisons linéaires formables sont celles de la forme $a\gamma(C) + \overline{a}\gamma(\overline{C})$. Pour calculer leur variance directement, on peut remarquer que pour toute variable aléatoire x complexe $\operatorname{var}(x) = \operatorname{var}(\overline{x})$. Donc si $\operatorname{cov}(x,\overline{x}) = 0$, la variance d'une combinaison linéaire réelle $ax + \overline{a}\,\overline{x}$ est $2|a|^2 \operatorname{var}(x)$. Elle est égale à $\operatorname{var}(x)$ si $|a| = 1/\sqrt{2}$.

4 Plans réguliers en blocs

La méthode précédente peut être généralisée pour former des plans en blocs. Les combinaisons de niveaux des facteurs blocs forment un groupe $V = (p_1) \times \cdots \times (p_q)$. La répartition en blocs des unités est déterminée par les coordonnées de $\psi(\mathbf{u})$ où ψ est une application affine de même nature que ϕ , déterminée par un élément $\mathbf{v}_0$ de V et par un morphisme Ψ de U dans V.

$$\psi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}_0 + \Psi \mathbf{u} \ . \tag{25}$$

Exemple 2 . $T = U = (2)^3$, $V = (2)^2$. L'application ϕ est l'identité et ψ est définie par $B_1 \circ \psi = A_1 + A_2$, $B_2 \circ \psi = A_1 + A_3$, où B_1, B_2 sont les caractères de base de V, A_1, A_2, A_3 ceux de T qui coincident avec ceux de U.

Cet exemple peut correspondre à deux situations assez différentes pour les blocs. Il peut y avoir un unique système de 4 blocs repérés par les éléments de V, ou deux systèmes de blocs croisés, lignes et colonnes, représentés respectivement par B_1 et B_2. Dans le premier cas, B_1 et B_2 n'ont pas de signification concrète et seront plutôt appelés des *pseudofacteurs* que des facteurs.

On suppose pour ce type de dispositif que la réponse sur l'unité $\mathbf{u}$ est la somme d'un effet traitement et d'un effet bloc:

$$E\left(y(\mathbf{u})\right) = \tau(\phi(\mathbf{u})) + \zeta(\psi(\mathbf{u})) \ .$$

A partir de (9) et de la décomposition similaire pour les effets blocs

$$\zeta = \sum_{B \in V^*} e(B) B \tag{26}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} E\left(y(\mathbf{u})\right) &= \textstyle\sum_A e(A) A\left(\phi(\mathbf{u})\right) + \sum_B e(B) B\left(\psi(\mathbf{u})\right) \\ &= \textstyle\sum_A e(A) A(\mathbf{t}_0) A\left(\Phi(\mathbf{u})\right) + \sum_B e(B) B(\mathbf{v}_0) B\left(\Psi(\mathbf{u})\right) \ . \end{aligned}$$

soit en notant y le vecteur des $m = m_1 \times \cdots \times m_r$ réponses

$$E(y) = \sum_A A(\mathbf{t}_0) e(A) A \circ \Phi + \sum_B B(\mathbf{v}_0) e(B) B \circ \Psi \ . \tag{27}$$

Le groupement des termes pour lesquels les caractères $A \circ \phi$ et $B \circ \Psi$ sont égaux à un même caractère C de U donne alors

$$E(y) = \sum_C \gamma(C) C \tag{28}$$

où pour $C \in U^*$

$$\gamma(C) = \sum_{A : A \circ \Phi = C} A(\mathbf{t}_0) e(A) + \sum_{B : B \circ \Psi = C} B(\mathbf{v}_0) e(B) \ . \tag{29}$$

Si tous les effets dans cette expression sont par hypothèse nuls, il en est de même de $\gamma(C)$. On peut évidemment restreindre la somme (28) aux paramètres $\gamma(C)$ non nuls. Les paramètres restant varient librement sous la seule condition que les paramètres associés à C et $\overline{C}$ sont conjugués.

La définition 3.1 peut être étendue au cas de ce type de dispositifs en blocs en remplaçant (14) par (29). Les effets confondus avec C sont donc les $e(A)$ et $e(B)$ tels que $A \circ \Phi = C$ et $B \circ \Psi = C$. L'estimation des paramètres $\gamma(C)$ s'effectue de la même façon qu'en l'absence de blocs.

En règle générale, l'application ψ est surjective, c'est à dire que pour chaque combinaison des facteurs ou pseudofacteurs blocs, il y a au moins une unité et en fait un nombre constant d'unités.

Dans ce cas, Ψ^* est injective et la somme sur B dans l'expression (29) de $\gamma(C)$ est soit réduite à un terme, soit vide selon que C appartient ou pas à $\mathrm{Im}\,\Psi^*$.

Exemple 3 . Reprenons l'exemple 2. Vu que $V^* = \{0, B_1, B_2, B_1 + B_2\}$, l'image de Ψ^* est $\{0, B_1 \circ \Psi, B_2 \circ \Psi, B_1 \circ \Psi + B_2 \circ \Psi\} = \{0, A_1 + A_2, A_1 + A_3, A_2 + A_3\}$. Les sommes $\gamma(C)$ impliquant un effet bloc sont donc $\gamma(0) = e(0) + e(0_B)$, $\gamma(C_1C_2) = e(A_1A_2) + e(B_1)$, $\gamma(C_1C_3) = e(A_1A_3) + e(B_2)$, $\gamma(C_2C_3) = e(A_2A_3) + e(B_1B_2)$.

5 Plans pour l'étude des effets principaux et interactions de deux facteurs

Une hypothèse souvent réaliste en pratique est que les interactions de beaucoup de facteurs sont négligeables par rapport aux effets principaux et interactions d'un nombre réduit de de facteurs. C'est pourquoi on s'intéresse particulièrement, dans l'ensemble des plans réguliers avec ou sans blocs, à ceux qui confondent les effets principaux et interactions de deux facteurs exclusivement avec des interactions d'ordre plus élevées que l'on peut supposer nulles.

Exemple 4 . Reprenons l'exemple 1. Le noyau de Φ^* est

$$\mathrm{Ker}\,\Phi^* = \Phi^{*-1}(0) = \{0, A_1 + A_2 + A_4, A_1 + A_3 + A_5, A_2 + A_3 + A_4 + A_5\}$$

Ses éléments non nuls contiennent au minimum trois facteurs. On dit que la fraction associée est de *résolution* 3. Il est clair avec une telle fraction qu'un effet principal ne peut être confondu qu'avec des interactions, puisque l'ajout aux éléments non nuls du noyau d'un caractère A formé à partir d'un seul des trois facteurs A_1, A_2, A_3 laisse subsister au moins deux facteurs. Ainsi A_2 se confond avec A_1A_4, $A_1A_2A_3A_5$, $A_3A_4A_5$, donc avec des interactions de deux, quatre et trois facteurs respectivement.

Exemple 5 . $U = (2)^4$, $T = (2)^7$, les quatre premiers facteurs de base A_1, A_2, A_3, A_4 de T coincident sur U avec les caractères de base des unités et les trois autres sont alors définis par $A_5 = A_1 + A_2 + A_3$, $A_6 = A_1 + A_2 + A_4$, $A_7 = A_1 + A_3 + A_4$.

En toute rigueur, on devrait écrire $A_i \circ \phi = C_i$ pour $i = 1,2,3,4$ et $A_5 \circ \phi = (A_1 + A_2 + A_3) \circ \phi, \ldots, A_7 \circ \phi = (A_1 + A_3 + A_4) \circ \phi$.

D'après la proposition 3.3, le noyau est engendré par les trois éléments $A_1+A_2+A_3+A_5$, $A_1+A_2+A_4+A_6$, $A_1+A_3+A_4+A_7$, donc $\mathrm{Ker}\,\Phi^* = \{0, A_1+A_2+A_3+A_5, A_1+A_2+A_4+A_6, A_3+A_4+A_5+A_6, A_1+A_3+A_4+A_7, A_2+A_4+A_5+A_7, A_2+A_3+A_6+A_7, A_1+A_5+A_6+A_7\}$.

Tous les éléments non nuls de ce noyau sont combinaisons linéaires d'un minimum de quatre facteurs. Un tel plan est dit de *résolution* 4. Un effet principal ne se confond dans un tel plan qu'avec des interactions d'au moins trois facteurs, mais les interactions de deux facteurs peuvent y être confondues entre elles. Par exemple, les effets confondus avec A_1A_2 sont A_3A_5, A_4A_6, $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, $A_2A_3A_4A_7$, $A_1A_4A_5A_7$, $A_1A_3A_6A_7$, $A_2A_5A_6A_7$. Même en négligeant les interactions de trois facteurs et plus, on voit que les trois interactions de deux facteurs A_1A_2, A_3A_5, A_4A_6 sont confondues donc non estimables séparément.

L'intérêt d'un plan de résolution 4 par rapport à un plan de résolution 3 est de permettre l'estimation des effets principaux même lorsqu'il y des interactions de deux facteurs incluses dans le modèle. Cela permet d'obtenir des estimations beaucoup plus *robustes* de ces effets principaux. Si l'on néglige alors les interactions de deux facteurs ou apparaissent des effets principaux non significativement différents de 0, certaines des combinaisons $\gamma(C)$ significativement différentes de 0 se réduisent alors à un seul terme, ce qui permet de les interpréter sans ambiguité.

Exemple 6 . $U = (2)^6$, $T = (2)^8$, les six premiers facteurs de base A_1 à A_6 de T coincident sur U avec les caractères de base des unités et les deux suivants sont définis par $A_7 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, $A_8 = A_1 + A_2 + A_5 + A_6$. Les éléments non nuls du noyau de Φ :

$$\mathrm{Ker}\,\Phi^* = \{0, A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_7, A_1 + A_2 + A_5 + A_6 + A_8, A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 \ ,$$

contiennent tous 5 symboles au moins. Le plan est dit de *résolution* 5. Il confond les effets principaux avec des interactions d'au moins quatre facteurs, les interactions de deux facteurs avec des interactions de trois facteurs au moins.

**

Pour faciliter la recherche de plans de résolution donnée, on peut utiliser la remarque suivante. Un élément non nul $a_1A_1 + \ldots + a_sA_s$ appartient au noyau $\mathrm{Ker}\,\Phi^*$ si $a_1A_1 \circ \Phi + \ldots + a_sA_s \circ \Phi = 0$. Pour que le plan soit d'une résolution ρ donnée, il faut et suffit qu'il n'existe pas de combinaison linéaire non nulle $a_1A_1 \circ \Phi + \ldots + a_sA_s \circ \Phi$, où $(a_1, \ldots, a_s) \in (n_1) \times \ldots \times (n_s)$, ayant strictement moins de ρ coefficients a_i non nuls.

Un cas particulier important est celui où tous les facteurs ont un même nombre de niveaux premier p. On sait dans ce cas que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = (p)$ est en fait un corps fini (noté usuellement F_p où $GF(p)$). Les groupes considérés U, T et leur duaux sont alors des espaces vectoriels sur ce corps fini et les résultats ci-dessus s'expriment en utilisant comme suit.

Proposition 5.1 *On suppose que $U = (p)^r$, $T = (p)^s$ où p est un premier, donc (p) le* *corps fini à p éléments. Alors le plan défini par l'application ϕ donnée en (11) est de résolution ρ si et seulement si $\rho - 1$ quelconques des s facteurs $A_i \circ \Phi$ sont indépendants.*

On dira aussi dans ce cas que les $A_i \circ \Phi$ sont indépendants par paquet de $\rho - 1$. Cette proposition est utilisée pour trouver dans quelques cas de figure le nombre maximum s_{max} de facteurs à p niveaux introductibles sur un ensemble de p^r unités avec une résolution ρ égale à 3 ou 4. Ce nombre est égal au nombre maximum d'éléments de $U^* = (p)^r$ tels que $\rho - 1$ d'entre eux soient indépendants (ces éléments peuvent être utilisés pour définir les $A_i \circ \Phi$). Les seuls résultats vraiment généraux concernent la résolution 3 et la résolution 4 quand $p = 2$.

Résolution 3 Le nombre maximum est $s_{max} = \dfrac{p^r - 1}{p - 1}$, c'est à dire le nombre de droites passant par l'origine dans U^*. Le calcul de ce nombre est basé sur le fait que dans $U^* - \{0\}$ qui a $p^r - 1$ éléments, la relation d'appartenance à une même droite est une relation d'équivalence dont les classes (les droites privées de 0) ont toutes le même nombre $p - 1$ d'éléments.

Résolution 4, $p = 2$ Le nombre maximum est $s_{max} = 2^{r-1}$.

Un exemple de 2^{r-1} éléments indépendants par paquet de trois est l'ensemble des combinaisons formées d'un nombre impair de symboles. Si on note δ le morphisme de U^* dans (2) défini par $\delta(c_1C_1 + \ldots + c_rC_r) = c_1 + \ldots + c_r$, ces éléments sont les caractères D de U vérifiant $\delta(D) = 1$. Si une combinaison linéaire $d_1D_1 + d_2D_2 + d_3D_3$ de trois de ces éléments est nulle, on a $\delta(d_1D_1 + d_2D_2 + d_3D_3) = d_1 + d_2 + d_3 = 0$. Il y a donc un nombre pair, 2 ou 0, de ces d_i qui sont égaux à 1. Mais il ne peut y en avoir 2 car cela impliquerait que deux des trois caractères D_1, D_2, D_3 sont égaux.

Par ailleurs supposons que $D_1, \ldots, D_s$ soient s éléments de U^* indépendants par paquets de trois. Alors les $2s$ éléments $D_1, \ldots, D_s, D_1 - D_1, \ldots, D_s - D_1$ sont tous distincts et par conséquent $2s \leq 2^r$ et $s \leq 2^{r-1}$.

Résolution 5, $p = 2$ En 1971, le nombre maximum s de facteurs pour une fraction de 2^r unités était connu pour $r \leq 8$, et sans qu'on en soit absolument certain, pour $r = 9$ (Draper, Mitchell 1970). Le tableau 3 donne ces nombres. On y a reporté aussi le nombre de paramètres du modèle d'analyse de variance associé comprenant les effets principaux et interactions de deux facteurs. Ce nombre est $p = 1 + n(n + 1/2$.

r	4	5	6	7	8	9
2^r	16	32	64	128	256	512
s_{max}	5	6	8	11	17	23
p	16	22	37	67	154	277

TAB. 3 – Nb. maxi. de facteurs dans une fraction régulière de taille 2^r, résolution 5

Plans d'expériences. A Kobilinsky, 28 Mars 1995

Labo de Biométrie.
INRA. Route de St-Cyr.
F78026 VERSAILLES Cedex.

6 Doublement d'un plan par son opposé

En doublant par son opposé un plan régulier pour facteurs à deux niveaux -1 et $+1$, on obtient, si le plan initial est de résolution 3, un plan régulier de résolution 4. Plus précisément les caractères confondus avec l'identité du plan doublé sont ceux du plan initial qui contiennent un nombre pair de facteurs. Pour démontrer cela, nous utiliserons la proposition suivante.

Proposition 6.1 *Soient $\Phi_1 : U_1 \longrightarrow T$, $\Phi_2 : U_2 \longrightarrow T$ deux morphismes définis respectivement sur les groupes U_1, U_2 et à valeur dans le même groupe T des traitements. Alors l'application Φ définie par*

$$\Phi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \Phi_1(\mathbf{u}_1) + \Phi_2(\mathbf{u}_2)$$

est un morphisme du groupe produit $U = U_1 \times U_2$ dans T et

$$\mathrm{Ker}\,\Phi^* = \mathrm{Ker}\,\Phi_1^* \cap \mathrm{Ker}\,\Phi_2^*.$$

Démonstration. Le morphisme Φ s'appelle le coproduit de Φ_1 et Φ_2. Le fait que ce soit un morphisme est un résultat classique et facile à démontrer de théorie des groupes.

Soient J_1, J_2 les injections canoniques de U_1, U_2 dans U :

$$J_1(\mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_1,0)\ ,\quad J_2(\mathbf{u}_2) = (0,\mathbf{u}_2)\ .$$

Il est clair que $\Phi \circ J_1 = \Phi_1$ et $\Phi \circ J_2 = \Phi_2$. Il s'en suit que si le caractère A de T vérifie $A \circ \Phi = 0$, alors $A \circ \Phi_1 = A \circ \Phi \circ J_1 = 0$ et de même $A \circ \Phi_2 = 0$. Réciproquement, si $A \circ \Phi_1 = 0$ et $A \circ \Phi_2 = 0$, alors pour tout élément $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ de U, $A \circ \Phi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = A(\Phi_1(\mathbf{u}_1)) + A(\Phi_2(\mathbf{u}_2)) = 0$, donc $A \circ \Phi = 0$. Ceci prouve l'égalité $\mathrm{Ker}\,\Phi^* = \mathrm{Ker}\,\Phi_1^* \cap \mathrm{Ker}\,\Phi_2^*$. □

Considérons alors le plan régulier défini par

$$\phi_1(\mathbf{u}_1) = \mathbf{t}_0 + \Phi(\mathbf{u}_1)$$

où Φ_1 est un morphisme de $U_1 = (2)^r$ dans $T = (2)^s$. On peut identifier les unités du plan doublé au produit $U = U_1 \times U_2$ où $U_2 = (2)$. les unités du plan initial s'identifie aux couples $(\mathbf{u}_1,0)$, celles du plan complémentaire aux couples $(\mathbf{u}_1,1)$. L'application ϕ donnant le traitement coincide avec ϕ_1 sur U_1 et s'obtient en rajoutant un vecteur de 1 sur la partie complémentaire (cela revient à prendre l'opposé en notation multiplicative). Si on note Φ_2 le morphisme $u_2 \mapsto (u_2, \ldots, u_2)$ de $U_2 = (2)$ dans T, on a donc

$$\phi(\mathbf{u}_1, u_2) = \phi_1(\mathbf{u}_1) + \Phi_2(u_2) = \mathbf{t}_0 + \Phi_1(\mathbf{u}_1) + \Phi_2(u_2) \ ,$$

soit

$$\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{t}_0 + \Phi(\mathbf{u})$$

où Φ est comme dans la proposition le coproduit de Φ_1 et Φ_2. Le plan doublé est donc bien un plan régulier. Les caractères confondus avec l'identité de ce plan sont les éléments de $\operatorname{Ker} \Phi^* = \operatorname{Ker} \Phi_1^* \cap \operatorname{Ker} \Phi_2^*$. Or un élément $A = a_1 A_1 + \ldots + a_s A_s$ de T^* appartient au noyau de Φ_2^* si $A \circ \Phi_2(1) = 0$, c'est à dire si $a_1 + \ldots + a_s = 0$, autrement dit s'il est formé à partir d'un nombre pair des facteurs de base A_i, d'où le résultat annoncé.

Si on double le plan initial en ne changeant que le signe de certains des facteurs, cela revient dans la construction ci-dessus à prendre un morphisme Φ_2 de matrice $(x_1, \ldots, x_s)$ dont les coordonnées x_i sont 1 pour les facteurs dont le signe est changé, 0 pour ceux dont le signe est inchangé. Ce morphisme vérifie $\Phi_2(u_2) = (x_1 u_2, \ldots, x_s u_2)$. Le noyau $\operatorname{Ker} \Phi^*$ de son dual contient les caractères $A = a_1 A_1 + \ldots + a_s A_s$ tels que $a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s = 0$, autrement dit ceux où apparaissent un nombre pair des facteurs changés de signe.

7 Mélange de facteurs à 2 et 4 niveaux

Deux options peuvent être choisies pour former des plans réguliers avec des facteurs ayant soit deux, soit quatre niveaux. Dans la première les niveaux d'un facteur A à quatre niveaux sont identifiés aux éléments du groupe cyclique (4). Dans la seconde, les niveaux d'un tel facteur sont identifiés aux éléments du groupe $(2)^2$. Cette seconde option conduit en pratique à une plus grande flexibilité dans la construction et c'est généralement celle que l'on retient.

Si le facteur A a quatre niveaux représentés par les couples (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) de $(2)^2$, il est commode de lui associer les deux *pseudofacteurs* A_1, A_2 associés aux projections sur les deux coordonnées. Lorsque le niveau de A est (a_1, a_2), les niveaux de A_1 et A_2 sont a_1 et a_2 respectivement. Si A est considéré comme une application de T dans $(2)^2$, A_1 et A_2 sont les applications composées $\mathrm{pr}_1 \circ A$, $\mathrm{pr}_2 \circ A$ où pr_1, pr_2 sont les projections sur les premières et secondes coordonnées du groupe $(2)^2$.

Toute la théorie des plans réguliers s'applique au cas ou certains facteurs sont ainsi décomposés en pseudofacteurs, à ceci prêt que l'ordre de l'interaction à laquelle appartient un effet factoriel est donnée par le nombre de facteurs apparaissant dans la définition de cet effet et non par le nombre de pseudofacteurs. Ainsi, supposons qu'il y a deux facteurs A et B à 4 niveaux. Les facteurs A et B sont décomposés en pseudofacteurs A_1, A_2 et B_1, B_2. Les trois effets $e(A_1 A_2 B_1 B_2)$, $e(A_1 B_1 B_2)$, $e(A_2 B_1)$ appartiennent tous trois à l'interaction entre les facteurs A et B et on leur accorde a priori une même importance, bien qu'y apparaissent des nombres différents de pseudofacteurs. De même, les trois effets principaux $e(A_1)$, $e(A_2)$, $e(A_1 A_2)$ sont considérés a priori comme également important.

Ceci n'est bien sûr vrai que si il y a complète symétrie entre les quatre niveaux, ce qui est faux pour un facteur quantitatif.

La notion de résolution doit être adaptée : c'est **le nombre de facteurs et non le nombre de pseudofacteurs** qui intervient pour définir la résolution du plan.

Exemple 7 . Soit A et B deux facteurs à quatre niveaux décomposés en pseudofacteurs A_1, A_2, B_1, B_2 et C, D deux facteurs à deux niveaux. La fraction 1/2 définie par $A_1A_2B_1B_2CD = 1$ est de résolution 4. Les groupes d'effets d'interaction de deux facteurs confondus sont $\{e(A_1A_2B_1B_2), e(CD)\}$, $\{e(A_1A_2C), e(B_1B_2D)\}$, $\{e(A_1A_2D), e(B_1B_2C)\}$. Noter que les autres effets d'interaction entre les facteurs A et B ne se confondent qu'avec des interactions de trois facteurs. Par exemple $e(A_1A_2B_1)$ se confond avec $e(B_2CD)$.

Exemple 8 . Une expérience est réalisée pour améliorer le milieu de culture d'un rhizobium symbiote du soja. Cette bactérie se fixe sur des nodosités de la racine du soja et lui permet d'absorber directement l'azote de l'air. Son apport, sur la tourbe entourant la semence ou directement dans le sillon où sont déposées les graines peut permettre une économie notable en engrais azoté.

Cette expérience teste simultanément 128 éprouvettes. Trois facteurs A, B, C sont étudiés à 4 niveaux et quatre facteurs D, E, F, G à deux niveaux seulement.

Il n'est pas possible de former avec ces facteurs et ce nombre d'unités un plan de résolution 5. Pour le prouver, sélectionnons comme pseudofacteurs de base les six A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 obtenus par décomposition de A, B, C et l'un des quatres autres facteurs à deux niveaux, disons D. On montre facilement que ce choix n'est pas restrictif.

Pour avoir la résolution 5, les expressions donnant les trois autres facteurs E, F, G doivent comporter chacune des quatre lettres A, B, C, D (pourquoi ?). Donc D apparaît dans les trois.

D'autre part deux de ces facteurs E, F, G ne peuvent avoir la même composante sur A, sur B, ou sur C. Pour le montrer, raisonnons par l'absurde. Supposons par exemple que E et F ont même composante sur A et s'écrivent donc $E = a_1A_1 + a_2A_2 + b_{1E}B_1 + b_{2E}B_2 + c_{1E}C_1 + c_{2E}C_2 + D$, $F = a_1A_1 + a_2A_2 + b_{1F}B_1 + b_{2F}B_2 + c_{1F}C_1 + c_{2F}C_2 + D$. Alors $E + F$ est égal à une combinaison des facteurs B et C et le plan n'est pas résolution 5.

La composante de G sur A, distincte de celles de E et F sur A, ne peut qu'être égale à la somme de ces deux composantes. Il en est de même des composantes sur B et C, et par suite les termes en A, B, C disparaissent de la somme $E + F + G$. On a donc $E + F + G + D = 0$ et le plan n'est pas de résolution 5.

En fait, dans cette expérience, les facteurs B et C (concentrations en azote organique et en extrait de levure) sont quantitatifs. Parmi les facteurs à quatre niveaux, seul le facteur A (la source de carbone : mannitol, glycérol, gluconate, glucose) est réellement qualitatif. L'importance d'un effet ou apparait un facteur quantitatif, disons B, dépend de la composante présente B_1, B_2, B_1B_2. On peut jouer la dessus pour adapter la fraction de résolution 4 sélectionnée. Il est même possible, si l'on admet que les effets impliquant des effets cubiques de B et C sont nuls de même que les interactions de trois facteurs, de réduire à 64 le nombre d'expériences à réaliser pour étudier tous ces facteurs. Le détail de la procédure utilisée est décrit dans :

Cliquet, Durier, Kobilinsky (1994). Principle of a fractional design for qualitative and quantitative factors; application to the production of *Bradyrhizobium japonicum* in culture and inoculation media.

8 Le lattice, un exemple de juxtaposition de plans réguliers

Supposons qu'il y a trois facteurs A_1, A_2, A_3 à deux niveaux et des blocs de taille 2. Par exemple, on s'interroge sur les capacités photosynthétiques de plantules de radis. Les facteurs sont la concentration en gaz carbonique, le type d'éclairage, l'humidité dans une enceinte climatisée. Mais on ne dispose que de deux enceintes climatisées et un même lot de plantules ne peut donc être étudié que dans deux conditions distinctes.

Une méthode d'éxpérimentation consiste à réaliser plusieurs fois de suite le plan factoriel complet comprenant les huit traitements étudiés en modifiant chaque fois la répartition en blocs pour ne pas confondre toujours les mêmes effets factoriels. Chacun des plans factoriels complets s'appelle une *réplique*. Le plan global est dit *résoluble*. De façon plus générale, un plan résoluble est un plan en blocs dans lequel les blocs peuvent être groupés en répliques comportant chacune l'ensemble des traitements étudiés.

Si on expérimente deux répliques, on peut définir les blocs de la première à partir des pseudofacteurs $A_1 + A_2 + A_3$ et $A_1 + A_2$, les blocs de la seconde à partir de $A_1 + A_2 + A_3$ et $A_2 + A_3$. Les effets factoriels confondus sont alors $e(A_1A_2A_3)$, $e(A_1A_2)$, $e(A_3)$ sur la première réplique, $e(A_1A_2A_3)$, $e(A_2A_3)$, $e(A_1)$ sur la seconde. Ainsi, en dehors de l'interaction des trois facteurs $e(A_1A_2A_3)$ confondue dans les deux répliques, tous les autres effets factoriels sont estimables dans un modèle où les effets des blocs sont fixes. Par exemple $e(A_3)$ peut être estimé à partir de la seconde réplique où il n'est pas confondu. Bien entendu, les effets $e(A_2)$, $e(A_1A_3)$ qui ne sont confondus sur aucune des deux répliques peuvent être estimés avec d'avantage de précision.

Pour préciser cela, on introduit les vecteurs y_1 et y_2 de dimension 8 donnant les réponses sur chaque réplique et les vecteurs β_1, β_2 de dimension 4 des effets fixes des blocs des deux répliques. On a

$$E(y_1) = \tau + \beta_1 \circ \Psi_1 \ ,$$

$$E(y_2) = \tau + \beta_2 \circ \Psi_2 \ .$$

On note B_1, B_2 les caractères de base du groupe $V = (2)^2$ utilisé pour représenter les blocs, $e_i(B)$ l'effet bloc associé au caractère B de V sur la réplique i :

$$e_i(B) = \langle \beta_i, B \rangle / 4$$

Le modèle linéaire peut alors s'écrire sous la forme donnée dans le tableau 4.

$$
\begin{array}{rcrcr}
E\left(\langle y_1,\mathbf{1}\rangle/8\right) & = & e(\mathbf{1}) & + & e_1(\mathbf{1})\\
E\left(\langle y_1,A_3\rangle/8\right) & = & e(A_3) & + & e_1(B_1B_2)\\
E\left(\langle y_1,A_2\rangle/8\right) & = & e(A_2) & & \\
E\left(\langle y_1,A_2A_3\rangle/8\right) & = & e(A_2A_3) & & \\
E\left(\langle y_1,A_1\rangle/8\right) & = & e(A_1) & & \\
E\left(\langle y_1,A_1A_3\rangle/8\right) & = & e(A_1A_3) & & \\
E\left(\langle y_1,A_1A_2\rangle/8\right) & = & e(A_1A_2) & + & e_1(B_2)\\
E\left(\langle y_1,A_1A_2A_3\rangle/8\right) & = & e(A_1A_2A_3) & + & e_1(B_1)\\
\\
E\left(\langle y_2,\mathbf{1}\rangle/8\right) & = & e(\mathbf{1}) & + & e_2(\mathbf{1})\\
E\left(\langle y_2,A_3\rangle/8\right) & = & e(A_3) & & \\
E\left(\langle y_2,A_2\rangle/8\right) & = & e(A_2) & & \\
E\left(\langle y_2,A_2A_3\rangle/8\right) & = & e(A_2A_3) & + & e_2(B_2)\\
E\left(\langle y_2,A_1\rangle/8\right) & = & e(A_1) & + & e_2(B_1B_2)\\
E\left(\langle y_2,A_1A_3\rangle/8\right) & = & e(A_1A_3) & & \\
E\left(\langle y_2,A_1A_2\rangle/8\right) & = & e(A_1A_2) & & \\
E\left(\langle y_2,A_1A_2A_3\rangle/8\right) & = & e(A_1A_2A_3) & + & e_2(B_1)
\end{array}
$$

TAB. 4 – Modèle linéaire pour un 2^3 en 2 répliques de 4 blocs

Compte tenu que chacun des 8 effets $e_i(B)$ n'apparaît que sur une seule ligne de ce tableau, les lignes où ils apparaissent sont inutilisables pour l'estimation des effets factoriels des traitements.

Sous les hypothèses usuelles, les variables $\langle y_i,A\rangle/8$ apparaissant à gauche des égalités sont non corrélées de même variance $\sigma^2/8$.

On en déduit que l'estimateur de moindres carrés d'un effet tel que $e(A_2)$, qui n'est confondu dans aucune des deux répliques, est la moyenne des variables $\langle y_i,A\rangle/8$ associées :

$$\hat{e}(A_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\langle y_1,A_2\rangle}{8} + \frac{\langle y_2,A_2\rangle}{8}\right) .$$

Cet estimateur a une variance $\sigma^2/16$.

L'estimateur des moindres carrés d'un effet confondu dans une des deux répliques est le terme $\langle y_i,A\rangle/8$ figurant sur la ligne où cet effet apparaît seul. Ainsi

$$\hat{e}(A_1) = \langle y_1,A_1\rangle/8 .$$

Cet estimateur a une variance $\sigma^2/8$ double de celle qu'on obtiendrait si l'effet n'était confondu dans aucun des deux blocs. On dit que $e(A_1)$ est estimé avec une *efficacité* $1/2$.

Enfin l'interaction $e(A_1A_2A_3)$ confondue dans les deux répliques avec les blocs n'est pas estimable si les effets blocs sont supposés fixes.

Un tel dispositif est appelé *lattice*. Ce mot anglais, généralement traduit par treillis en français, désigne un entrecroisement de lattes, de fils. Dans le cas des dispositifs en lattice, ce sont les blocs de traitements des différentes répliques qui s'entrecroisent.

9 Représentation matricielle des morphismes

On peut représenter les éléments de U et T par des vecteurs colonnes et le morphisme Φ par une matrice ϕ_{ij} telle que la coordonnée i ème de $\Phi(u)$ est

$$\Phi(u)_i = \sum_{j=1}^{r} \phi_{ij} u_j \ .$$

La j ème colonne de cette matrice, que l'on note également Φ, est l'image $\Phi(e_j)$ du vecteur canonique $e_j = (0,\dots,0,1,0,\dots 0)'$ qui a toutes ses coordonnées nulles sauf la j ème égale à 1.

De même, les éléments $A = a_1 A_1 + \ldots + a_s A_s$ et $C = c_1 C_1 + \ldots + c_r C_r$ des duals T^* et U^* sont représentés respectivement par les vecteurs colonnes $(a_1,\dots,a_s)'$ et $(c_1,\dots,c_r)'$. On a :

$$A_i(\Phi\mathbf{u}) = \frac{M}{n_i}\sum_j \phi_{ij}u_j = \sum_j \frac{\phi_{ij}m_j}{n_i}\frac{M}{m_j}u_j = \sum_j \phi^*_{ji}C_j(\mathbf{u})$$

c'est à dire

$$A_i \circ \Phi = \sum_j \phi^*_{ji} C_j \tag{30}$$

où

$$\phi^*_{ji} = \frac{\phi_{ij}m_j}{n_i} \ . \tag{31}$$

L'image $A \circ \Phi$ du caractère $A = a_1 A_1 + \cdots + a_s A_s$ associé à $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_s)'$:

$$A \circ \Phi = \sum_i a_i \left(\phi^*_{1i}C_1 + \cdots + \phi^*_{ri}C_r\right) = \left(\sum_i \phi^*_{1i}a_i\right) C_1 + \cdots + \left(\sum_i \phi^*_{ri}a_i\right) C_r \ , \tag{32}$$

est le caractère de U associé à $(\sum_i \phi^*_{1i}a_i,\dots,\sum_i \phi^*_{ri}a_i)$. La matrice du morphisme dual Φ^* est donc $\Phi^* = (\phi^*_{ij})$.

Ces indications devraient suffire pour traiter le problème (1) sur la nettoyabilité des surfaces. Pour les problèmes (2) et (3), vous aurez sans doute besoin d'explications complémentaires que je donnerai le 9 Mars.

exopt.tex, 21/09/1992

Pour établir la relation entre la densité optique y et la concentration x d'une certaine substance dans une solution, on mesure y dans 6 tubes contenant des concentrations x prédéterminées. On sait que la relation est linéaire pour $x \leq 2$, et on hésite entre les deux séries de concentrations suivantes:

- série 1 : $\{0,0,0,2,2,2\}$
- série 2 : $\{0,0,1,1,2,2\}$

1. Ecrire la relation liant y à x, sans oublier l'erreur notée ε. Transformer cette relation de façon à faire apparaître la variable x centrée, c'est à dire $x-1$ à la place de x. Comment s'interprètent les paramètres apparaissant dans chacune des formes du modèle ainsi obtenues?

On suppose que - la variance d'erreur est indépendante de la concentration,
- les erreurs pour 2 tubes distincts sont indépendantes.

2. Discuter le bien-fondé de ces hypothèses.

On note σ^2 la variance d'erreur, y_{ij} la $j^{\text{ème}}$ réponse de la série i.

3. Déduire du modèle écrit en fonction de $x-1$ l'écriture matricielle du modèle pour chacune des séries 1 et 2, sans oublier la matrice de variance-covariances des erreurs.

4. Exprimer les estimateurs des paramètres du modèle avec x centré en fonction des réponses $y_{i1}, \ldots, y_{i6}$ de la série i. Donner les variances associées. Donner aussi l'estimateur de σ^2 et les intervalles de confiance de ces paramètres.

A partir des paramètres estimés, on peut prédire la densité optique y pour toute concentration x donnée. On note $\hat{y}_i(x)$ la prédiction ainsi obtenue pour la série i.

5. Donner l'expression de $\hat{y}_i(x)$ et sa variance.

6. Comparer les deux séries avec les critères suivants :
   - variance de la pente de la droite de régression
   - variance maximum de $\hat{y}_i(x)$ pour $0 \leq x \leq 2$.
   - variance moyenne de $\hat{y}_i(x)$ sur l'intervalle [0,2]
   - $\det(n(X'X)^{-1})$ où X est la matrice d'incidence dans le modèle écrit en fonction de $x-1$ et $n=6$ le nombre d'unités expérimentales
   - $\mathrm{trace}(n(X'X)^{-1})$

7. Pourquoi la comparaison précédente est-elle inadaptée lorsqu'on n'est pas sûr que la DO évolue linéairement sur tout l'intervalle [0,2] ? Comment tester la linéarité de la relation DO-concentration ?

8. Comment feriez vous pour estimer une concentration x inconnue à partir de y ?

pbcor.tex, 03/04/1995

1.

a) Dans un plan de Plackett et Burman, les colonnes associées aux différents facteurs sont mutuellement orthogonales. Le plan est donc de résolution III. Le plan proposé est saturé et ne peut donc être de résolution supérieure à III.

b) Il y 2^{15} traitements et $2^4 = 2^{15-11}$ unités expérimentales. Il faut donc 11 relations de définition indépendantes pour définir le plan.

c) Le nombre d'interactions entre deux facteurs est égal à $(15 \times 14)/2$. Chaque effet principal est donc confondu en moyenne avec $14/2 = 7$ interactions entre deux facteurs.

d) Le produit entre les colonnes S14 et S15 donne

$$(+1, +1, -1, -1, +1, -1, +1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, +1),$$

qui est l'opposée de la colonne associée à S11. Donc l'interaction entre S14 et S15 est confondue avec l'effet principal de S11.

2. Sur le graphe, une cassure apparaît nettement entre S9 et S6. Les souches qui semblent produire un effet significatif sont donc S1, S11, S5, S14, S3 et S6. Parmi ces souches, on s'intéresse à celles donnant une note élevée, c'est-à-dire celles qui ont un effet principal positif. On sélectionne donc S1, S5, S3 et S6.

3. On a retenu quatre souches. Avec 16 unités, on peut effectuer un plan factoriel complet. Avec 8 souches, on peut utiliser un plan de résolution IV en confondant $S1.S3.S5.S6$ avec la moyenne.

exam92.tex

DEA Modélisation Stochastique et Statistique
Module 0S 5 : Contrôle de la qualité et plans d'expériences

Avril 1992

Enseignants : A. KOBILINSKY, Christine DURIER, H. MONOD, Camille DUBY

10 Construction par les morphismes de groupe

On désire étudier comment l'ajout de nitrite à différents types de morceaux provenant de la cuisse du porc influence certaines caractéristiques physiques, chimiques, sensorielles, microbiologiques des jambons fabriqués à partir de ces morceaux. Les trois types de morceaux considérés sont "*noix, sous-noix et noix patissière*".

On a besoin de 2 kg du morceau considéré pour faire toutes les analyses nécessaires. Ces 2 kg constituent donc l'unité expérimentale de base à laquelle on ajoute par malaxage le nitrite à une certaine concentration. On réalise une expérience avec 4 porcs en prélevant sur chacun d'eux 4 kg de noix, 2 kg de sous-noix et 2 kg de noix patissière. Le nitrite est apporté à 4 concentrations. Pour établir le protocole expérimental, on fait d'abord comme si les 4 kg de noix de chaque animal se subdivisaient en 2 kg d'une 1ère catégorie et 2 kg d'une 2ème catégorie, donc comme si il y avait 4 types distincts de morceaux.

On note N, T, P, les facteurs nitrite, type de morceau, animal (Porc). Chacun de ces facteurs est décomposé en deux pseudofacteurs avec les codages suivants:

N	N_1	N_2	T	T_1	T_2	P	P_1	P_2
1	-1	-1	noix patissière	-1	-1	1	-1	-1
2	-1	1	noix cat 1	-1	1	2	-1	1
3	1	-1	noix cat 2	1	-1	3	1	-1
4	1	1	sous-noix	1	1	4	1	1

Les niveaux correspondants dans $\{0,1\}$ sont notés n_1, n_2, t_1, t_2, p_1, p_2.

N	n_1	n_2	T	t_1	t_2	P	p_1	p_2
1	1	1	noix patissière	1	1	1	1	1
2	1	0	noix cat 1	1	0	2	1	0
3	0	1	noix cat 2	0	1	3	0	1
4	0	0	sous-noix	0	0	4	0	0

La concentration de nitrite (n_1,n_2) ajoutée au morceau codé (t_1,t_2) de l'animal codé (p_1,p_2) est alors définie par:

$$\begin{aligned} n_1 &= p_1 + t_1 \pmod 2 \\ n_2 &= p_2 + t_2 \pmod 2 \end{aligned} \tag{33}$$

Les 16 unités expérimentales sont repérées de même que les traitements par les quadruplets $u = (n_1,n_2,t_1,t_2) \in (2)^4$ (qui sont représentés sous forme de vecteurs colonne dans les calculs matriciels). On désigne par Ψ le morphisme qui à l'unité u fait correspondre le couple $p = (p_1,p_2) \in (2)^2$ définissant l'animal.

1. Donner la matrice de Ψ.

L'animal est considéré comme un facteur bloc et on suppose que chacune des caractéristiques y ultérieurement analysée suit le modèle:

$$E(y(n_1,n_2,t_1,t_2)) = \underbrace{\mu(n_1,n_2,t_1,t_2)}_{\text{effet du traitement}} + \underbrace{\beta(p_1,p_2)}_{\text{effet bloc}} \tag{34}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$E\left(y(u)\right) = \mu(u) + \beta(\Psi(u))$$

Les applications $u \mapsto y(u)$, $u \mapsto \mu(u)$ et $a \mapsto \beta(a)$ sont notées Y, M et B respectivement. Ces applications peuvent aussi être considérées comme des vecteurs de dimension 16, 16 et 4 respectivement. Y est le vecteur des réponses, M le vecteur des effets traitements et B le vecteur des effets blocs.

2. Réécrire le modèle sous forme vectorielle (i.e. exprimer $E(Y)$ en fonction de M, B et Ψ).

On suppose désormais que $\mathrm{cov}(Y) = \sigma^2\mathbf{I}$.

On note N_1, N_2, T_1, T_2 les caractères de base du groupe des unités (qui coincide avec le groupe des traitements). Les vecteurs $N_1^{\nu_1}N_2^{\nu_2}T_1^{\tau_1}T_2^{\tau_2}$ associés aux 16 quadruplets (ν_1, ν_2, τ_1, τ_2) d'exposants 0 ou 1 forment donc l'ensemble des caractères de ce groupe. On note de même P_1, P_2 les caractères de base du groupe $(2)^2$ associé aux 4 animaux, et $P_1^{\pi_1}P_2^{\pi_2}$ un caractère quelconque de ce groupe.

3. Après avoir décomposé M et B sur les bases de caractères adéquates, donnez l'expression de $E(Y)$ en fonction des caractères $N_1^{\nu_1}N_2^{\nu_2}T_1^{\tau_1}T_2^{\tau_2}$. En déduire les espérances des formes linéaires $\langle N_1^{\nu_1}N_2^{\nu_2}T_1^{\tau_1}T_2^{\tau_2},Y\rangle/16$ en fonction des effets factoriels des traitements et des blocs. Donnez également les variances et covariances de ces formes.

4. Quelle est la condition sur ν_1, ν_2, τ_1, τ_2 pour que $e(N_1^{\nu_1}N_2^{\nu_2}T_1^{\tau_1}T_2^{\tau_2})$ soit confondu avec un effet factoriel des blocs? Y a-t-il des effets principaux confondus?

On va maintenant tenir compte de ce que "*noix cat 1*" et "*noix cat 2*" ne sont en fait qu'un même type de morceau. Cela se traduit par les égalités:

$$\mu(n_1,n_2,1,0) = \mu(n_1,n_2,0,1) \tag{35}$$

On pose:

$$\delta(\nu_1,\nu_2,t_1,t_2) = \sum_{n_1,n_2} (-1)^{\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2} \mu(n_1,n_2,t_1,t_2) \tag{36}$$

5. Exprimer $e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2})$ en fonction des $\delta(\nu_1,\nu_2,t_1,t_2)$. Montrer que

$$e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1) = e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_2) \tag{37}$$

   Combien y a-t-il d'effets factoriels traitements réellement distincts?

6. Parmi ces derniers, quels sont ceux qui sont non estimables? (utilisez les résultats de la question 3)

7. Quels sont les estimateurs des moindres carrés et variances associées pour les effets $e(N_1T_1)$, $e(T_1)$?

8. Même question, mais en faisant l'hypothèse que les effets des blocs sont nuls. En déduire les efficacités d'estimation de ces deux effets en comparant les variances trouvées dans cette question à celles trouvées dans la question précédente.

On prélève maintenant 4 kg de sous-noix par porc (c'est possible), ce qui permet de disposer de deux unités de sous-noix. Pour définir la concentration en nitrite, on définit les pseudofacteurs T_1, T_2 de la façon indiquée par le tableau ci-dessous:

T	T_1	T_2	t_1	t_2
noix patissière	-1	-1	1	1
noix cat 1	-1	1	1	0
noix cat 2	1	-1	0	1
sous-noix 1	1	1	0	0
sous-noix 2	1	-1	0	1

On utilise alors les mêmes égalités (33) pour définir n_1 et n_2. Ce nouveau plan comprend donc 5 unités par porc, soit un total de 20 unités.

9. En considérant le sous plan de 16 unités obtenu en excluant le morceau *noix cat 2*, montrez que tous les contrastes d'interaction entre le facteur type de morceau et N_1N_2 sont estimables.

   ATTENTION : le couple (t_1,t_2) ne définit pas le même type de morceau dans ce sous plan. Il est préférable pour éviter les confusions de noter différemment les effets, par exemple $\mu'(n_1,n_2,t_1,t_2)$ pour les effets traitements, $e'(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2})$ pour les effets factoriels. On notera que

$$\begin{aligned}
\mu'(n_1,n_2,1,1) &= \mu(n_1,n_2,1,1) \\
\mu'(n_1,n_2,1,0) &= \mu(n_1,n_2,1,0) \\
\mu'(n_1,n_2,0,0) &= \mu(n_1,n_2,0,0) \\
\mu'(n_1,n_2,0,1) &= \mu(n_1,n_2,0,0) \neq \mu(n_1,n_2,0,1)
\end{aligned}$$

10. Déduire de la question précédente que tous les contrastes entre traitements sont estimables dans le plan à 20 unités.

11 Application du théorème d'équivalence de Kiefer-Volfowitcz

On considère le modèle

$$E(Y(x_1,x_2)) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_1 x_2$$

où le domaine de définition de x_1, x_2 est la région carrée ayant pour coins $(\pm 1, \pm 1)$. Montrez que le plan D-optimal est celui qui répartit les points avec la distribution définie par le tableau ci-dessous, où p est la pondération affectée à chaque point:

x_1	x_2	p
-1	-1	$3/16$
0	-1	$2/16$
1	-1	$3/16$
-1	1	$3/16$
0	1	$2/16$
1	1	$3/16$

Indication: on a intérêt à reparamétrer le modèle en centrant x_1^2 autour de sa valeur moyenne:

$$\overline{x_1^2} = \sum p_i x_{1i}^2 = \frac{3}{16}(-1)^2 + \frac{2}{16}0^2 + \frac{3}{16}1^2 + \frac{3}{16}(-1)^2 + \frac{2}{16}0^2 + \frac{3}{16}1^2 = \frac{3}{4}$$

La matrice d'information du plan est alors diagonale (attention à prendre en compte la pondération dans le calcul de cette matrice d'information).

Corrigé de la section 10

1.

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$E(Y) = M + B \circ \Psi$$

3. On a:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{\nu_1,\nu_2,\tau_1,\tau_2} N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2} e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}) \\ B &= \sum_{\pi_1,\pi_2} P_1^{\pi_1} P_2^{\pi_2} e(P_1^{\pi_1} P_2^{\pi_2}) \\ B \circ \Psi &= \sum_{\pi_1,\pi_2} \left[(P_1^{\pi_1} P_2^{\pi_2}) \circ \Psi\right] e(P_1^{\pi_1} P_2^{\pi_2}) \ . \end{aligned}$$

Comme $P_1 \circ \Psi = N_1 T_1$, $P_2 \circ \Psi = N_2 T_2$, on a

$$\begin{aligned} (P_1^{\pi_1} P_2^{\pi_2}) \circ \Psi &= (P_1 \circ \Psi)^{\pi_1} (P_2 \circ \Psi)^{\pi_2} \\ &= (N_1 T_1)^{\pi_1} (N_2 T_2)^{\pi_2} \\ &= N_1^{\pi_1} T_1^{\pi_1} N_2^{\pi_2} T_2^{\pi_2} \ , \end{aligned}$$

d'où

$$B \circ \Psi = \sum_{\pi_1,\pi_2} N_1^{\pi_1} T_1^{\pi_1} N_2^{\pi_2} T_2^{\pi_2} e(P_1^{\pi_1} P_2^{\pi_2}) \ .$$

Finalement

$$E(\langle N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}, Y\rangle) = \langle N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}, M\rangle + \langle N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}, B \circ \Psi\rangle \ ,$$

$$\begin{aligned} \langle N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}, M\rangle &= 16\, e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}) \ , \\ \langle N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}, B \circ \Psi\rangle &= 0 & \text{si } \nu_1 \neq \tau_1 \text{ ou } \nu_2 \neq \tau_2 \\ &= 16\, e(P_1^{\pi_1} P_2^{\pi_2}) & \text{si } \begin{cases} \nu_1 = \tau_1 = \pi_1, \\ \nu_2 = \tau_2 = \pi_2 \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} E(\langle N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}, Y\rangle / 16) &= e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}) \quad \text{si } \nu_1 \neq \tau_1 \text{ ou } \nu_2 \neq \tau_2 \text{ et} \\ E(\langle N_1^{\pi_1} N_2^{\pi_2} T_1^{\pi_1} T_2^{\pi_2}, Y\rangle / 16) &= e(N_1^{\pi_1} N_2^{\pi_2} T_1^{\pi_1} T_2^{\pi_2}) + e(P_1^{\pi_1} P_2^{\pi_2}) \ . \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\mathrm{var}(\langle N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}, Y\rangle / 16) = \sigma^2/16$$

Les covariances entre ces formes linéaires sont nulles.

4. La condition pour que $e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2})$ soit confondu est donc que $\nu_1 = \tau_1$ et $\nu_2 = \tau_2$. Il n'y a pas d'effets principaux confondus.

5.

$$\begin{aligned}
16\, e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}) &= \sum_u (N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2})\,(u)\; \mu(u) \\
&= \sum_{n_1,n_2,t_1,t_2} (-1)^{\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \tau_1 t_1 + \tau_2 t_2} \mu(n_1,n_2,t_1,t_2) \\
&= \sum_{t_1,t_2} (-1)^{\tau_1 t_1 + \tau_2 t_2} \sum_{n_1,n_2} (-1)^{\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2} \mu(n_1,n_2,t_1,t_2) \\
&= \sum_{t_1,t_2} (-1)^{\tau_1 t_1 + \tau_2 t_2} \delta(\nu_1,\nu_2,t_1,t_2)
\end{aligned}$$

En particulier

$$16\, e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1) = \delta(\nu_1,\nu_2,0,0) - \delta(\nu_1,\nu_2,1,0) + \delta(\nu_1,\nu_2,0,1) - \delta(\nu_1,\nu_2,1,1)$$

$$16\, e(N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_2) = \delta(\nu_1,\nu_2,0,0) + \delta(\nu_1,\nu_2,1,0) - \delta(\nu_1,\nu_2,0,1) - \delta(\nu_1,\nu_2,1,1)$$

Comme $\delta(\nu_1,\nu_2,1,0) = \delta(\nu_1,\nu_2,0,1)$, on a l'égalité annoncée.

Il y a 12 effets factoriels réellement distincts en comptant $e(\mathbf{1})$.

6. Parmi les 3 effets confondus trouvés à la question (4), à savoir $e(N_1T_1)$, $e(N_2T_2)$, $e(N_1N_2T_1T_2)$, le seul qui demeure non estimable lorsqu'on prend en compte l'égalité (35) est $e(N_1N_2T_1T_2)$ puisque $e(N_1T_1) = e(N_1T_2)$ et $e(N_2T_2) = e(N_2T_1)$ admettent respectivement $\langle N_1T_2, Y\rangle/16$ et $\langle N_1T_2, Y\rangle/16$ comme estimateurs sans biais.

7. Les résultats obtenus à la question (3) permettent de réécrire le modèle sous la forme

$$E(Z) = X\xi\,, \qquad \mathrm{cov}(\xi) = \frac{\sigma^2}{16}\mathbf{I}$$

où Z est le vecteur des formes linéaires $\langle N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} T_1^{\tau_1} T_2^{\tau_2}, Y\rangle/16$ associées aux caractères du groupe des unités, et ξ le vecteur des effets factoriels distincts.

D'autre part

$$E(\langle N_1T_1, Y\rangle/16) = e(N_1T_1) + e(P_1)$$

$$E(\langle N_1T_2, Y\rangle/16) = e(N_1T_2) = e(N_1T_1)$$

et les paramètres $e(N_1T_1)$ et $e(P_1)$ n'apparaissent dans l'espérance d'aucune des autres formes linéaires du vecteur Z. On peut donc dériver l'estimateur des moindres carrés de $e(N_1T_1)$ des deux formes linéaires $\langle N_1T_1, Y\rangle/16$, $\langle N_1T_2, Y\rangle/16$. Mais en fait, la première de ces deux formes ne peut être utilisée si l'effet bloc $e(P_1)$ n'est pas nul (pour s'en convaincre, reparamétrisez en posant $\alpha(N_1T_1) = e(N_1T_1) + e(P_1)$). L'estimateur des moindres carrés de $e(N_1T_1)$ est donc $\langle N_1T_2, Y\rangle/16$ qui a pour variance $\sigma^2/16$.

De même, on a

$$E(\langle T_1,Y\rangle /16) = e(T_1)$$

$$E(\langle T_2,Y\rangle /16) = e(T_2) = e(T_1)$$

et ces deux formes linéaires sont les seules ou apparait le paramètre $e(T_1)$, qui admet donc pour estimateur des moindres carrés la moyenne $(\langle T_1,Y\rangle + \langle T_2,Y\rangle)/32$ de variance $\sigma^2/32$.

8. Sous l'hypothèse de nullité des effets blocs, l'estimateur de $e(T_2)$ reste inchangé. Celui de $e(N_1T_1)$ devient la moyenne $(\langle N_1T_1,Y\rangle + \langle N_1T_2,Y\rangle)/32$ qui a pour variance $\sigma^2/32$. L'efficacité est donc 1 pour $e(T_1)$ et 1/2 pour $e(N_1T_1)$.
9. Dans le sous plan considéré, on a $\mu'(n_1,n_2,0,0) = \mu'(n_1,n_2,0,1)$. Dans ces conditions tous les contrastes d'interaction entre N_1N_2 et le type de morceau sont engendrés par les deux contrastes $e'(N_1N_2T_1)$ et $e'(N_1N_2T_2)$ (on a $e'(N_1N_2T_1T_2) = -e'(N_1N_2T_2)$). Ces deux contrastes, non confondus avec les blocs, sont estimables. D'où le résultat.
10. Le seul contraste $e(N_1N_2T_1T_2)$ non estimable dans le premier plan devient estimable dans le sous-plan considéré à la question précédente et donc a fortiori dans le plan à 20 unités.

Corrigé de la section 11

Le modèle peut être réécrit sous la forme:

$$E(Y(x_1,x_2)) = \beta_0' + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3(x_1^2 - 3/4) + \beta_4 x_1 x_2$$

où $\beta_0' = \beta_0 + (3/4)\,\beta_3$.

La matrice X du plan considéré est alors:

$$\begin{array}{cc} \text{matrice } X & \text{poids } p \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1/4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -3/4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1/4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1/4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3/16 \\ 2/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 2/16 \\ 3/16 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matrice d'information est $M = \mathrm{diag}(1,\frac{3}{4},1,\frac{3}{16},\frac{3}{4})$. Pour $x = (x_1,x_2)$, posons $f(x) = [1,x_1,x_2,(x_1^2 - 3/4),x_1x_2]'$. La variance de prédiction au point x est

$$f(x)'M^{-1}f(x) = 1 + (4/3)x_1^2 + x_2^2 + (16/3)(x_1^2 - 3/4)^2 + (4/3)x_1^2x_2^2$$

Cette variance dépend linéairement de x_2^2 avec un coefficient $1 + (4/3)x_1^2$ qui est toujours positif. Son maximum sur x_2 est donc obtenu lorsque $x_2^2 = 1$. Ce maximum est

$$1 + (4/3)x_1^2 + 1 + (16/3)(x_1^2 - 3/4)^2 + (4/3)x_1^2 = (16/3)x_1^4 - (16/3)x_1^2 + 5$$

Comme $(16/3)x_1^4 - (16/3)x_1^2 = (16/3)x_1^2(x_1^2 - 1)$ est toujours négatif sur le domaine considéré (et nul pour $x_1^2 = 0$ ou 1) , la variance de prédiction maximum est égale à 5, c'est à dire au nombre de paramètres du modèle. On peut alors conclure en utilisant le théorème de Kiefer-Volfowitcz à la G et D-optimalité de ce plan.

exam93.tex

DEA Modélisation Stochastique et Statistique
Module 0S 5 : Contrôle de la qualité et plans d'expériences

Avril 1993

Enseignants : A. KOBILINSKY, Christine DURIER, Camille DUBY

12 Construction par les morphismes de groupe

On veut étudier l'influence de trois facteurs sur la texture y de fromage de Comté :

A la taille des grains de caillés en fin de décaillage,
B la hauteur des moules,
C la cinétique de pressage.

L'unité expérimentale est un microcomté (fromage de taille réduite), produit dans une petite cuve à laquelle est associé une presse. On dispose de 4 systèmes "cuveýpresse" (facteur P) permettant donc de réaliser en parallèle 4 microcomtés dans la même journée. On a observé dans le passé des différences entre ces 4 systèmes qui incitent à prendre en compte le facteur P dans la mise en place et l'analyse du plan.

Le lait utilisé varie d'une journée à l'autre et on doit donc aussi prendre en compte le facteur journée (J).

On prévoit de réaliser une expérience sur 8 journées (comprenant donc $32 = 8 \times 4$ unités), avec 4 niveaux pour A et 2 niveaux pour B et C. Les 16 traitements définis par les combinaisons de niveaux des facteurs A, B, C sont répétés deux fois.

Pour la construction du plan, on éclate A en deux pseudofacteurs A_1 et A_2, P en deux pseudofacteurs P_1, P_2, et J en trois pseudofacteurs J_1, J_2, J_3, et on introduit un pseudofacteur supplémentaire R pour le numéro de répétition.

Les niveaux de ces facteurs ou pseudofacteurs sont identifiés aux éléments du groupe (2) et représentés par les lettres minuscules correspondantes indicées de la même façon (a_1 pour A_1, b pour B, etc ...).

Les unités expérimentales, traitements, journées, systèmes "cuveýpresse" et les groupes correspondants sont représentés comme indiqué ciýdessous.

unités expérimentales	$u = (a_1,a_2,b,c,r)$	$U = (2)^5$
traitements	$t = (a_1,a_2,b,c)$	$T = (2)^4$
système cuveýpresse	$p = (p_1,p_2)$	$P = (2)^2$
journées	$j = (j_1,j_2,j_3)$	$J = (2)^3$

Le traitement t, la journée j et la presse p sur l'unité u sont définis par des morphismes de groupe (surjectifs) notés respectivement Φ, Ψ, Λ, soit matriciellement par :

$$t = \Phi u, \quad j = \Psi u, \quad p = \Lambda u \; . \tag{38}$$

La variable y caractérisant la texture suit le modèle

$$E(y(u)) = \mu(t) + \beta(j) + \gamma(p) \; , \tag{39}$$

où t, j, p sont le traitement, la journée, la presse associée à l'unité u. On suppose en outre que le vecteur y des 32 réponses vérifie

$$\mathrm{var}(y) = \sigma^2 \mathbf{I}$$

1. Montrer que le dual d'un morphisme surjectif est injectif.

2. Donner la matrice Φ. Ecrire l'espérance du vecteur y en fonction des effets factoriels associés aux caractères des groupes T, J, P (que l'on pourra noter χ, ξ, ζ). Si $\chi \in T^*$, à quelle condition $e(\chi)$ estýil confondu avec un effet journée $e(\xi)$, $\xi \in J^*$? Deux effets factoriels traitements distincts $e(\chi)$, $e(\chi')$ (χ,$\chi' \in T^*$) peuventýils être confondus ?

3. Soient $\xi \in J^*$, $\zeta \in P^*$ des caractères non nuls de J et P. Montrez que $\xi \circ \Psi$ et $\zeta \circ \Lambda$ sont des caractères distincts dans U^*. *(On utilise le fait qu'il y a pour tout $j \in J$ et $p \in P$ une unité u telle que $\Psi u = j$, $\Lambda u = p$.)* En déduire que $\mathrm{Im}\,\Psi^* \cap \mathrm{Im}\,\Lambda^* = \{0\}$. Les effets $e(\xi)$ et $e(\zeta)$ peuventýils être confondus ?

Dans ce qui suit, les caractères de base des groupes T, P, J sont notés de la même façon que les facteurs, à savoir A_1, A_2, B, C pour T, P_1, P_2 pour P et J_1, J_2, J_3 pour J. On s'autorise, s'il n'y a pas de risque de méprise, à noter de la même façon les caractères induits sur U. Ainsi, les 4 premiers caractères de base de U, notés $A_1 \circ \Phi$, $A_2 \circ \Phi$, $B \circ \Phi$, $C \circ \Phi$ en toute rigueur, sont aussi désignés par A_1, A_2, B, C. Le caractère de base de U associé à la projection sur la dernière coordonnée est noté R.

Soit Δ^* le morphisme quotient $U^* \to U^*/\,\mathrm{Im}\,\Psi^*$ et la matrice correspondante.

4. Quelle condition doivent respecter les deux premières colonnes de Δ^* pour que l'effet principal de A soit non confondu avec l'effet journée ? Montrez qu'on peut choisir Δ^* (donc Ψ) de façon à ne confondre avec l'effet journée aucun des effets principaux des facteurs A, B, C, mais qu'on est alors obligé de confondre certains effets factoriels appartenant aux interactions AB et AC.

Dans la suite, le plan retenu est défini par les relations

$$J_1 = A_1 B, \quad J_2 = A_2 C, \quad J_3 = R \tag{40}$$

$$P_1 = A_1 BC, \quad P_2 = A_1 CR. \tag{41}$$

5. Comment faudrait-il écrire en toute rigueur les deux dernières égalités?

6. Classer les effets factoriels traitements en effets non confondus, effets confondus avec l'effet presse, effets confondus avec l'effet journée. Précisez, pour un effet dans chacune de ces classes, la fonction estimable canonique correspondante, l'estimateur et la variance d'estimation. Quelles sont les formes linéaires $\langle y,\delta\rangle$, $\delta \in U^*$, d'espérance nulle? Comment peut-on estimer σ^2 à partir de ces formes?

7. Déduire de (40) et (41) les expressions de A_1, A_2, B, C en fonction de J_1, J_2, J_3, P_1, P_2.

8. Le plan défini par les relations (40) et (41) est donné non randomisé dans le tableau 5. Comment doit-on le randomiser?

(p_1,p_2) \ (j_1,j_2,j_3)	000	001	010	011	100	101	110	111
00	0000	1010	0100	1110	1101	0111	1001	0011
01	1010	0000	1110	0100	0111	1101	0011	1001
10	1111	0101	1011	0001	0010	1000	0110	1100
11	0101	1111	0001	1011	1000	0010	1100	0110

TAB. 5 – *Plan non randomisé*

Les colonnes correspondent aux journées, les lignes aux presses.
Les cases donnent les traitements (a_1,a_2,b,c) associés.

En pratique, on ne peut malheureusement former que trois classes de grains de caillés en fonction de leur taille : *petits, moyens, gros.* On utilise alors le plan précédent en définissant le niveau véritable du facteur A à partir des niveaux des pseudofacteurs A_1 et A_2 de la façon indiquée dans le tableau ci-dessous. Ce tableau introduit aussi quatre pseudofacteurs $A'_0 = \mathbf{1}$, A'_1, $A'_2 = A_1A_2$, A'_3 utilisés pour faciliter l'analyse.

	notation				pseudofacteurs A'_α			
	add.		mult.					
taille	a_1	a_2	A_1	A_2	A'_0	A'_1	A'_2	A'_3
petit	1	1	-1	-1	1	$-\sqrt{2}$	1	0
moyen	1	0	-1	1	1	0	-1	$-\sqrt{2}$
moyen	0	1	1	-1	1	0	-1	$\sqrt{2}$
gros	0	0	1	1	1	$\sqrt{2}$	1	0

Les pseudofacteurs A'_α sont utilisés pour former des facteurs produits $A'_\alpha B^\beta C^\gamma$ ($\alpha \in \{0,1,2,3\}$, β, $\gamma \in \{0,1\}$) définis sur T, auxquels on associe des effets $e(A'_\alpha B^\beta C^\gamma)$ de la façon usuelle (B et C étant pris à valeur dans $\mathbb{R}_2$) :

$$(A'_\alpha B^\beta C^\gamma)(t) = A'_\alpha(t)B(t)^\beta C(t)^\gamma$$

$$16\, e(A'_\alpha B^\beta C^\gamma) = \langle \mu, A'_\alpha B^\beta C^\gamma \rangle = \sum_{t\in T} \mu(t)(A'_\alpha B^\beta C^\gamma)(t) \;,$$

où $\mu(t) = \mu(a_1,a_2,b,c)$ est l'effet du traitement associé à l'élément $t = (a_1,a_2,b,c)$ et μ le vecteur dans $\mathbb{R}^{16}$ de ces effets.

Par exemple, $A'_1 B$ est défini par

$$\begin{array}{rcll} (A'_1B)(a_1,a_2,b,c) & = & -\sqrt{2}(-1)^b & \text{si } (a_1,a_2) = (1,1) \\ & = & 0 & \text{si } (a_1,a_2) = (1,0) \text{ ou } (0,1) \\ & = & \sqrt{2}(-1)^b & \text{si } (a_1,a_2) = (0,0). \end{array}$$

L'effet associé est défini par

$$16\, e(A'_1B) = \langle A'_1B,\mu\rangle = \sum_{a_1,a_2,b,c} (A'_1B)(a_1,a_2,b,c)\mu(a_1,a_2,b,c)\ .$$

Rappelons que les produits $A'_\alpha B^\beta C^\gamma$ sont des vecteurs orthogonaux de norme $\sqrt{16}$ de $\mathbb{R}^{16}$. Noter aussi que $A'_0 B^\beta C^\gamma$ et $A'_2 B^\beta C^\gamma$ coincident avec les caractères $B^\beta C^\gamma$ et $A_1A_2B^\beta C^\gamma$ de T, et donc qu'on a

$$\begin{array}{rcl} e(B^\beta C^\gamma) & = & e(A'_0B^\beta C^\gamma) \\ e(A_1A_2B^\beta C^\gamma) & = & e(A'_2B^\beta C^\gamma) \end{array}$$

9. Montrez que l'application linéaire $\mu \mapsto \theta = \Big(e(A'_\alpha B^\beta C^\gamma)\Big)_{\alpha,\beta,\gamma}$ de $\mathbb{R}^{16}$ est inversible. Exprimer μ en fonction des effets $e(A'_\alpha B^\beta C^\gamma)$.

10. Quelles contraintes vérifie le vecteur μ et quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^{16}$ auquel il appartient ? Qu'induisent ces contraintes pour les effets $e(A'_3B^\beta C^\gamma)$?

11. Comment s'expriment A_1 et A_2 en fonction de A'_1 et A'_3 ? En déduire l'expression des caractères $A_1B^\beta C^\gamma$ et $A_2B^\beta C^\gamma$ de T en fonction des produits $A'_1B^\beta C^\gamma$ et $A'_3B^\beta C^\gamma$, puis celle des effets correspondants $e(A_1B^\beta C^\gamma)$, $e(A_2B^\beta C^\gamma)$ en fonction des effets $A'_\alpha B^\beta C^\gamma$ non nuls.

    Combien y a-t-il d'effets factoriels $e(A_1^{\alpha_1}A_2^{\alpha_2}B^\beta C^\gamma)$ réellement différents ? Quels sont parmi ces derniers les effets estimables ? Donner l'estimateur et la variance d'estimation de $e(A_1B)$ et $e(A_1C)$.

13 Etude d'un plan en blocs partiellement équilibré à 2 classes

On considère le plan P composé de 4 blocs de 3 unités sur lesquelles sont répartis 6 traitements $\{1,2,3,4,5,6\}$ de la façon suivante :

[1,2,3], [1,4,5], [2,4,6], [3,5,6]

On note I, D et J les matrices 6×6 suivantes :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On note θ_i l'effet du traitement i pour $i = 1, \dots, 6$, et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_6)'$.

1. Exprimer la matrice de concurrence NN' du plan comme combinaison linéaire des trois matrices I, D, J.

On montre que les matrices suivantes

$$P_0 = \frac{J}{6}, \quad P_1 = \frac{I + D}{2} - \frac{J}{6}, \quad P_2 = \frac{I - D}{2}$$

sont les opérateurs de projection associés à une décomposition en somme directe orthogonale de $\mathbb{R}^6$.

2. Exprimez la matrice d'information $C = rI - NN'/k$ où $(r = 2,\ k = 3)$ en fonction de ces opérateurs. A partir de cette expression, montrez que les contrastes entre les θ_i sont estimables et trouvez une inverse généralisée de C.
3. Déduire de l'expression précédente que la variance $\widehat{\theta_i - \theta_j}$ prend deux valeurs possibles selon les couples $(i,j), i \neq j$. Préciser ces deux valeurs en fonction de la variance résiduelle.
4. En utilisant les relations entre les paramètres v, b, k, r, λ d'un plan en blocs incomplets équilibré (BIE), montrez qu'il faut au minimum 10 blocs de taille 3 pour construire un BIE pour 6 traitements. Quel est pour un tel plan le nombre de concurrences entre deux traitements ?

On rappelle que :

- un contraste entre les θ_i est une forme linéaire $c'\theta$ telle que la somme des coefficients est nulle $(c'\mathbf{1} = 0)$.
- une forme linéaire $c'\theta$ est estimable si $c \in \operatorname{Im} C$.
- une inverse généralisée de C est une matrice C^- satisfaisant $CC^-C = C$.
- si C est une inverse généralisée et $c'\theta$ une forme linéaire estimable, la variance de l'estimateur des moindres carrés dans le modèle usuel pour les plans en blocs est $\sigma^2\, c'C^-c$.

Corrigé de la section 12

1. Soit Φ un morphisme surjectif. Si χ vérifie $\Phi^*(\chi) = \chi \circ \Phi = 0$, χ s'annule sur $\mathrm{Im}\,\Phi$ et est donc nul.

2.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E(y) = \sum_{\chi \in T^*} e(\chi)\, \chi \circ \Phi + \sum_{\xi \in J^*} e(\xi)\, \xi \circ \Psi + \sum_{\zeta \in P^*} e(\zeta)\, \zeta \circ \Lambda$$

$e(\chi)$ et $e(\xi)$ sont confondus si $\chi \circ \Phi = \xi \circ \Psi$.

Comme Φ est surjective, Φ^* est injective et deux effets traitements distincts ne peuvent être confondus.

3. Soit $j \in J$, $p \in P$ tels que $\xi(j) = 0$, $\zeta(p) = 1$, et $u \in U$ l'unité telle que $\Psi(u) = j$, $\Lambda(u) = p$. On a $\xi \circ \Psi(u) = 0$ et $\zeta \circ \Lambda(u) = 1$, donc les caractères $\xi \circ \Psi$ et $\zeta \circ \Lambda$ sont distincts.

   Soit $\delta = \Psi^*(\xi) = \Lambda^*(\zeta)$ un caractère de $\mathrm{Im}\,\Psi^* \cap \mathrm{Im}\,\Lambda^*$. On a $\xi \circ \Psi = \zeta \circ \Lambda$, donc $\xi = 0$ ou $\zeta = 0$ ce qui implique $\delta = 0$.

   Si ξ et ζ sont non nuls, on a $\xi \circ \Psi \neq \zeta \circ \Lambda$ et les effets $e(\xi)$ et $e(\zeta)$ ne sont pas confondus.

4. Pour que l'effet principal de A soit non confondu avec l'effet journée, $\mathrm{Ker}\,\Delta^* = \mathrm{Im}\,\Psi^*$ ne doit contenir aucun des éléments A_1, A_2, $A_1 + A_2$ (i.e. (1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (1,1,0,0,0)). Les images par Δ^* de ces 3 éléments de U^* sont les 2 premières colonnes de Δ^* et leur somme. Ces deux colonnes doivent donc être non nulles et distinctes (de somme non nulle).

   Si les colonnes 3 et 4 de Δ^* sont non nulles, les effets B et C ne sont pas confondus. Exemple :

$$\Delta^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   La colonne 3 est nécessairement combinaison linéaire des deux premières colonnes, et on confond par conséquent un effet factoriel de l'interaction AB. On confond de même un effet factoriel de l'interaction AC.

5.

$$P_1 \circ \Lambda = (A_1BC) \circ \Phi = (A_1 \circ \Phi)\,(B \circ \Phi)\,(C \circ \Phi),$$

$$P_2 \circ \Lambda = \Big((A_1C) \circ \Phi\Big)\,R = (A_1 \circ \Phi)\,(C \circ \Phi)\,R.$$

6.

effets confondus avec l'effet journée	$e(A_1B)$, $e(A_2C)$, $e(A_1A_2BC)$
effets confondus avec l'effet presse	$e(A_1BC)$
effets non confondus	tous les autres autres, à savoir $e(A_1)$, $e(A_2)$, $e(A_1A_2)$, $e(B)$, $e(A_2B)$, $e(A_1A_2B)$, $e(C)$, $e(A_1C)$, $e(A_1A_2C)$, $e(BC)$, $e(A_2BC)$

fonction estimable canonique	estimateur	variance
$e(A_1B) + e(J_1)$	$\langle y, A_1B\rangle /32$	$\sigma^2/32$
$e(A_1BC) + e(P_1)$	$\langle y, A_1BC\rangle /32$	$\sigma^2/32$
$e(A_1)$	$\langle y, A_1\rangle /32$	$\sigma^2/32$

Les formes linéaires d'espérance nulle sont les produits scalaires de y avec les caractères de U qui n'appartiennent pas à $\operatorname{Im}\Phi^* \cup \operatorname{Im}\Psi^* \cup \operatorname{Im}\Lambda^*$.

Les caractères n'appartenant pas à $\operatorname{Im}\Phi^*$ sont ceux qui incluent R. Il faut exclure parmi ces derniers ceux qui sont confondus avec l'effet journée ($R = J_3$, $A_1BR = J_1J_3$, $A_2CR = J_2J_3$, $A_1A_2BCR = J_1J_2J_3$) ou avec l'effet presse ($A_1CR = P_2$, $BR = P_1P_2$). En fin de compte on trouve les 10 caractères suivants :

$$A_1R, A_2R, A_1A_2R, A_2BR, A_1A_2BR, CR, A_1A_2CR, BCR, A_1BCR, A_2BCR$$

On estime σ^2 par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_\delta \langle y, \delta\rangle^2}{32 \times 10}$$

où δ varie dans l'ensemble des 10 caractères ci-dessus.

7.

$$A_1 = P_1P_2J_1J_3, \quad A_2 = P_1J_1J_2, \quad B = P_1P_2J_3, \quad C = P_1J_1$$

8. On doit permuter de façon aléatoire les colonnes et les lignes (de façon indépendante). C'est à dire qu'on associe de façon aléatoire les presses aux éléments de P et qu'on associe de même de façon aléatoire les journées 1 à 8 aux éléments de J. On peut aussi, mais ce n'est pas indispensable, choisir au hasard chacune des correspondances entre les niveaux réels d'un des facteurs A, B, C et les éléments du groupe correspondant ($(2)^2$ pour A, (2) pour B et C). Il ne faut en aucun cas permuter de façon aléatoire les 16 traitements, car on perd alors toutes les bonnes propriétés du plan.

9. Les 16 produits $A'_\alpha B^\beta C^\gamma$ sont des vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^{16}$, de norme $\sqrt{16}$. Soit H la matrice 16×16 qui a ces vecteurs en colonne. On a :

$$H'H = 16\,\mathbf{I}$$

$$\theta = \frac{1}{16} H'\mu$$

La matrice H est donc la matrice de l'application considérée, et elle est inversible. Par ailleurs

$$\mu = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} A'_\alpha B^\beta C^\gamma e(A'_\alpha B^\beta C^\gamma)$$

10. On a $\mu(1{,}0{,}b{,}c) = \mu(0{,}1{,}b{,}c)$ puisque $(1{,}0{,}b{,}c)$ et $(0{,}1{,}b{,}c)$ sont un même traitement. La dimension du sous-espace est 12.

$$16\,e(A'_3 B^\beta C^\gamma) = \sum_{b,c} (-1)^{\beta b + \gamma c} \sum_{a_1,a_2} A'_3(a_1{,}a_2{,}b{,}c)\mu(a_1{,}a_2{,}b{,}c)$$

La somme sur a_1, a_2 se réécrit :

$$0\mu(1{,}1{,}b{,}c) - \sqrt{2}\mu(1{,}0{,}b{,}c) + \sqrt{2}\mu(0{,}1{,}b{,}c) + 0\mu(0{,}0{,}b{,}c)$$

et est nulle en raison de l'égalité $\mu(1{,}0{,}b{,}c) = \mu(0{,}1{,}b{,}c)$.

On a donc $e(A'_3 B^\beta C^\gamma) = 0$.

11.

$$A_1 = (A'_1 + A'_3)/\sqrt{2} \qquad A_2 = (A'_1 - A'_3)/\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{rcl} A_1 B^\beta C^\gamma & = & (A'_1 B^\beta C^\gamma + A'_3 B^\beta C^\gamma)/\sqrt{2} \\ A_2 B^\beta C^\gamma & = & (A'_1 B^\beta C^\gamma - A'_3 B^\beta C^\gamma)/\sqrt{2} \\ e(A_1 B^\beta C^\gamma) & = & e(A'_1 B^\beta C^\gamma)/\sqrt{2} \\ e(A_2 B^\beta C^\gamma) & = & e(A'_1 B^\beta C^\gamma)/\sqrt{2} \end{array}$$

Les effets trouvés confondus à la question (6) sont $e(A_1B)$, $e(A_2C)$, $e(A_1A_2BC)$ et $e(A_1BC)$. Seul $e(A_1A_2BC)$ demeure non estimable.

$e(A_1B) = e(A_2B)$ peut être estimé par $\langle y{,}A_2B\rangle/32$ avec pour variance $\sigma^2/32$.

$e(A_1C) = e(A_2C)$ peut être estimé par $\langle y{,}A_1C\rangle/32$ avec une variance $\sigma^2/32$.

Corrigé de la section 13

1.

$$NN' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = J + \mathbf{I} - D$$

2.

$$NN' = 6P_0 + 2P_2$$

$$C = 2\mathbf{I} - NN'/3 = 2(P_0 + P_1 + P_2) - (6P_0 + 2P_2)/3 = 2P_1 + \frac{4}{3}P_2$$

L'image de C est donc l'orthogonal de l'image de P_0, c'est à dire l'orthogonal de $\mathbf{1}$ ce qui montre l'estimabilité des contrastes. Une inverse généralisée est

$$C^- = \frac{P_1}{2} + \frac{3}{4}P_2$$

3. on a

$$C^- = \frac{I + D}{4} - \frac{J}{12} + \frac{3}{8}(I - D)$$

soit

$$24C^- = 15\mathbf{I} - 3D - 2J$$

$$C^- = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -2 & -2 & -2 & -5 \\ -2 & 13 & -2 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & 13 & -5 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -5 & 13 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & -2 & -2 & 13 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & -2 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

La variance d'une différence est

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\widehat{\theta_i - \theta_j}) &= \frac{30}{24}\sigma^2 = \frac{5}{4}\sigma^2 \quad \text{si } i \neq 7 - j \\ \mathrm{var}(\widehat{\theta_i - \theta_j}) &= \frac{36}{24}\sigma^2 = \frac{3}{2}\sigma^2 \quad \text{si } i = 7 - j \end{aligned}$$

4. On a $k = 3$, $v = 6$. Comme $r = bk/v = b/2$, b doit être divisible par 2. D'autre part $\lambda = r(k-1)/(v-1) = b/5$ donc b doit être divisible par 5. Par suite b doit être multiple de 10 et la valeur 10 vérifie la contrainte d'inégalité $b \geq v$. Pour $b = 10$, on a $\lambda = 2$. (on peut vérifier dans les tables de Raghavarao qu'il existe un tel BIE).

exam94.tex

DEA Modélisation Stochastique et Statistique, 1994
Module 0S 5 : Contrôle de la qualité et plans d'expériences

Avril 1994

Enseignants : A. KOBILINSKY, Camille DUBY

Dans tout ce devoir, on note de la même façon les morphismes de groupe et leur matrice.

14 Nettoyabilité des surfaces

On cherche à améliorer une méthode de détachement de bactéries adhérant à la surface d'un échantillon de sol. On prend en compte les 8 facteurs à 2 niveaux suivants :

Facteurs				
A	:	temp. du détachement	40 degC	50 degC
B	:	ultras-sons	absence	4 périodes de 5mn
C	:	vortex	absence	4 périodes de 1mn
D	:	Tween 80	absence	2%
E	:	pyrophosphate de Na	absence	0.01%
F	:	trypsine	absence	2%
G	:	détergent Henkel	absence	2%
H	:	pH	8	9

On réalise d'abord un plan pour 16 expériences. Les unités étant repérées par les niveaux des 4 facteurs A, B, C, D pris comme facteurs de base, on définit les niveaux des 4 autres facteurs par:

$$E = -ABC, \quad F = ABD, \quad G = ACD, \quad H = -BCD$$

La variable y observée représente l'efficacité du détachement. On suppose les interactions de trois facteurs ou plus nulles.

Avec les notations du cours, le traitement affecté à l'unité u s'écrit $\phi(u) = s + \Phi(u)$ ou Φ est un morphisme du groupe U des unités dans le groupe T des traitements, s un élément de T.

1. Précisez s et Φ et montrez que Φ est injective.

2. Soit χ un caractère de T^*. Quelle est la conbinaison linéaire des effets confondus avec $e(\chi)$ qu'il est possible d'estimer. Application: $\chi = A$, $\chi = AB$ (ne pas faire figurer les effets supposés nuls).

Les combinaisons linéaires estimables d'effets confondus non nuls sont celles qui figurent au tableau 6 (on peut compléter les trous sur les lignes $\gamma(A)$ et $\gamma(AB)$ en utilisant les résultats de la question 2). A droite de ce tableau figurent les estimations et SCE (Somme de Carrés d'Ecarts) associées.

		fonc. est. can.	estimation	SCE
b	$\gamma(B)$	$e(B)$	-0.1591	0.4050
t	$\gamma(AB)$	$\ldots$	0.1573	0.3962
e	$\gamma(ABC)$	$-e(E)$	0.1423	0.3240
z	$\gamma(ABCD)$	$-e(AH)+e(BG)+e(CF)-e(DE)$	0.1129	0.2040
x	$\gamma(BD)$	$e(BD)-e(CH)+e(AF)-e(EG)$	-0.1022	0.1674
d	$\gamma(D)$	$e(D)$	0.0927	0.1377
a	$\gamma(A)$	$\ldots$	-0.0892	0.1274
g	$\gamma(ACD)$	$e(G)$	-0.0826	0.1093
u	$\gamma(AC)$	$e(AC)+e(DG)-e(FH)-e(BE)$	-0.0296	0.0140
c	$\gamma(C)$	$e(C)$	0.0276	0.0122
w	$\gamma(BC)$	$e(BC)-e(DH)+e(FG)-e(AE)$	0.0205	0.0067
f	$\gamma(ABD)$	$e(F)$	0.0146	0.0034
y	$\gamma(CD)$	$e(CD)-e(BH)+e(AG)-e(EF)$	-0.0093	0.0014
v	$\gamma(AD)$	$e(AD)+e(CG)+e(BF)+e(EH)$	0.0044	0.0003
h	$\gamma(BCD)$	$-e(H)$	0.0030	0.0001

TAB. 6 – *Combinaisons linéaires estimables d'effets confondus non nuls*

3. Précisez la formule générale donnant l'estimation et la SCE associées à une telle combinaison linéaire d'effets $\gamma(\xi)$, $\xi \in U^*$.
   Cas particulier: exprimer l'estimation de $\gamma(AB)$ en fonction des moyennes $y(a,b,\bullet,\bullet)$ où $y(a,b,c,d)$ désigne l'observation sur l'unité (a,b,c,d).

Un graphique des quantiles approprié conduit à retenir, pour estimer la variance d'erreur, les 7 dernières combinaisons linéaires du tableau 6. Les autres 8 combinaisons linéaires ($\gamma(B)$ à $\gamma(ACD)$), auxquelles sont associées des SCE nettement plus grandes, sont considérées comme étant significativement différentes de 0.

On néglige les interactions où apparaissent un des trois facteurs C, F, H d'effet principal négligeable. Les combinaisons linéaires d'effets décrétées non nulles prennent alors la forme donnée dans le tableau 7. **Tous les effets qui n'apparaissent pas dans ce tableau sont supposés nuls**.

On désire réaliser des expériences supplémentaires pour obtenir des estimations séparées non biaisées des effets confondus $e(BG)$, $e(DE)$, $e(BD)$, $e(EG)$. On dit aussi que l'on cherche à *désaliaser les effets confondus*.

4. Pourquoi ne peut-on désaliaser les effets confondus avec seulement 2 expériences complémentaires.

   On pourra se contenter de donner les idées sans faire nécessairement une démonstration très rigoureuse.

   ATTENTION : on fait l'hypothèse qu'il peut y avoir un décalage entre le premier plan et ce plan complémentaire. Ce décalage se traduit par l'ajout d'une constante inconnue μ dans le modèle du second plan.

$\gamma(B)$	$e(B)$
$\gamma(AB)$	$e(AB)$
$\gamma(ABC)$	$-e(E)$
$\gamma(ABCD)$	$e(BG) - e(DE)$
$\gamma(BD)$	$e(BD) - e(EG)$
$\gamma(D)$	$e(D)$
$\gamma(A)$	$e(A)$
$\gamma(ACD)$	$e(G)$

TAB. 7 – *Combinaisons linéaires non nulles d'effets confondus*

On définit une fraction supplémentaire de 4 expériences, dont les unités sont repérées par les niveaux des deux facteurs de base A et B, en posant:

$$D = E = A \qquad G = AB$$

Les niveaux de C, F, H peuvent être choisis arbitrairement sur cette fraction supplémentaire puisque on ne prend plus en compte ces facteurs dans le modèle. Ces facteurs seront ignorés dans ce qui suit.

On note Φ_1 la matrice 5×2 définissant cette fraction de taille 4 (i.e. A, B, D, E, G à partir de A, B).

5. Donnez $\operatorname{Ker} \Phi_1^*$.

Le tableau 8 donne les combinaisons linéaires d'effets non nuls qu'il est possible d'estimer à partir de cette fraction de taille 4. La seconde ligne $\delta(A)$ est incomplète.

$\delta(\mathbf{1})$	$e_1(\mathbf{1}) + e(DE)$
$\delta(A)$	$e(A) + \ldots$
$\delta(B)$	$e(B) + e(EG)$
$\delta(AB)$	$e(G) + e(BD) + e(AB)$

TAB. 8 – *Comb. lin. d'effets non nuls estimables par le plan complémentaire*

6. Donner le contenu de la seconde ligne, i.e. $\delta(A)$.

7. Montrez que cette expérience complémentaire, qui porte à 20 le nombre total d'unités expérimentales, permet de désaliaser les effets confondus.

15 Répartition en blocs d'une fraction $1/4$ d'un 2^8

Un plan d'expérience pour 8 facteurs à 2 niveaux A, B, C, D, E, F, G, H et 64 unités est défini par les relations de définition suivantes

$$G = ABCEF \qquad H = BDEF\ .$$

1. Donnez la matrice Φ du morphisme définissant le plan et précisez sa résolution.

Les unités sont réparties en blocs en utilisant un morphisme de groupe $\Psi : U \to V$. On note Δ^* le morphisme quotient de U^* sur $U^*/\operatorname{Im}\Psi^*$.

2. Quelle condition doit vérifier la matrice $\Delta^* \circ \Phi^*$ pour que les effets principaux et interactions de 2 facteurs ne soient pas confondus avec des effets des blocs.

3. Montrez que l'on ne peut pas répartir les unités en 8 blocs de taille 8 sans confondre au moins un effet principal ou une interaction de 2 facteurs.

Les unités sont réparties en 4 blocs de taille 16 en définissant les blocs par les pseudofacteurs Bl_1, Bl_2 suivants:

$$\mathrm{Bl}_1 = ADF \qquad \mathrm{Bl}_2 = ABC$$

4. Montrez qu'on peut alors prendre comme matrice de Δ^*

$$\Delta^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i.e. montrez qu'avec ce choix $\operatorname{Ker}\Delta^* = \operatorname{Im}\Psi^*$)

5. En déduire qu'on ne confond avec cette répartition en blocs aucun effet principal et aucune interaction de deux facteurs.

16 Micromalterie

Une micromalterie comprend 4 paniers contenant chacun 2 kg de grain. On s'interroge sur l'influence de 6 facteurs A, B, C, D, E, F sur la qualité du malt fabriqué.

A cette fin est mis en place un plan factoriel complet comprenant 64 unités. Une unité est constituée par un échantillon de 2 kg traitée dans un panier. Puisqu'il y a 4 paniers, on peut traiter 4 échantillons à la fois. Ces 4 échantillons traités simultanément forment un bloc. L'effet bloc est à prendre en compte car la variabilité entre unités d'un même bloc est généralement plus faible que celle entre unités de blocs différents.

Les contraintes techniques obligent à maintenir constant dans chaque bloc les facteurs A, B, C. Les trois autres facteurs D, E, F peuvent varier librement d'une unité à l'autre.

Les unités sont repérées de même que les traitements par les 6-uplets (a,b,c,d,e,f) de niveaux des 6 facteurs traitement. Les blocs sont définis par les 4 pseudofacteurs suivants

$$\mathrm{Bl}_1 = A, \quad \mathrm{Bl}_2 = B, \quad \mathrm{Bl}_3 = C, \quad \mathrm{Bl}_4 = D + E + F \tag{42}$$

Chaque bloc est alors défini par un quadruplet (b_1,b_2,b_3,b_4) de niveaux de ces pseudofacteurs. On note V le groupe des blocs formé par l'ensemble des 16 quadruplets ainsi associés aux blocs.

1. Pourquoi est-il préférable de faire figurer les trois facteurs D, E, F dans Bl_4 plutôt que deux d'entre eux, par exemple $\mathrm{Bl}_4 = D + E$.
2. Quels sont les effets traitement confondus avec les blocs?

Pour permettre d'estimer et tester les effets confondus avec les blocs, on suppose maintenant l'effet bloc aléatoire:

$$y(u) = \mu + \tau(u) + \beta(\Psi(u)) + \varepsilon(u)\ .$$

où μ est une constante,
τ le vecteur 64×1 des effets des traitements,
β le vecteur 16×1 des effets aléatoires des blocs
ε le vecteur 64×1 des erreurs.

Les aléatoires $\beta(v)$, $\varepsilon(u)$ sont supposées non corrélées, d'espérance nulle et de variances

$$\mathrm{var}(\beta(v)) = \sigma_0^2 \qquad \mathrm{var}(\varepsilon) = \sigma^2$$

Vectoriellement, le modèle se met sous la forme

$$y = \mu\mathbf{1} + \tau + \beta \circ \Psi + \varepsilon\ .$$

avec

$$\mathrm{var}(\beta) = \sigma_0^2 \mathbf{I}_{16} \qquad \mathrm{var}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}_{64}$$

On s'intéresse dans ce qui suit à la ditribution des contrastes $\langle y,\chi\rangle/64$ pour $\chi \in \mathrm{Im}\,\Psi^*$

3. si $\chi = \xi \circ \Psi$, montrez que $\langle \beta \circ \Psi,\chi\rangle = 4\,\langle \beta,\xi\rangle$

4. Montrez que les 15 contrastes $\langle y,\chi\rangle /64$, $\chi \in \mathrm{Im}\,\Psi^*$, sont non corrélés et ont une même variance σ_1^2 que l'on exprimera en fonction de σ_0^2 et σ^2.

5. Si on suppose nulles les interactions impliquant trois facteurs traitement ou d'avantage, comment peut-on estimer d'une part σ_1^2, d'autre part les effets traitement confondus avec les blocs.

On se propose de montrer maintenant que toute répartition en blocs définie par un morphisme de groupe est de la forme (42). Plus précisément qu'elle peut être définie par les trois pseudofacteurs $\mathrm{Bl}_1 = A$, $\mathrm{Bl}_2 = B$, $\mathrm{Bl}_3 = C$ et par un quatrième pseudofacteur de la forme $\mathrm{Bl}_4 = dD + eE + fF$. Ceci parait intuitivement évident, mais la démonstration rigoureuse est un peu technique.

On note $\Psi : U \to V$ le morphisme utilisé pour répartir les traitements en blocs, $V = (2)^4$ étant le groupe utilisé pour représenter les blocs.

6. Tenant compte du fait que A, B, C restent constants dans chaque bloc, montrez que l'on peut trouver des morphismes Bl_1, Bl_2, Bl_3 de V dans (2) tels que:

$$\mathrm{Bl}_1 \circ \Psi = A \quad \mathrm{Bl}_2 \circ \Psi = B \quad \mathrm{Bl}_3 \circ \Psi = C \ .$$

7. Montrez que Bl_1, Bl_2, Bl_3 sont indépendants.

On complète ce système par un quatrième élément Bl_4 de V^* de façon à former une base.

8. Montrez qu'on peut choisir Bl_4 tel que $\mathrm{Bl}_4 \circ \Psi$ soit combinaison linéaire de D, E, F, i.e.

$$\mathrm{Bl}_4 \circ \Psi = dD + eE + fF \ .$$

9. Utilisant le fait que Bl_1, Bl_2, Bl_3, Bl_4 constituent une base de V^*, montrez que le morphisme $\Omega : v \mapsto (\mathrm{Bl}_1(v),\mathrm{Bl}_2(v),\mathrm{Bl}_3(v),\mathrm{Bl}_4(v))$ est un isomorphisme de V sur $(2)^4$. Quelle est la matrice de Ψ^* relativement à cette base (et à la base A, B, C, D, E, F de U^*).

Corrigé de la section 14

1.

$$s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $\Phi(u_1,u_2,u_3,u_4) = 0$, il est clair que $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ puisque u_1, u_2, u_3, u_4 sont les 4 premières coordonnées de $\Phi(u_1,u_2,u_3,u_4)$. Donc $\Phi(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ et Φ est injective.

2. La combinaison linéaire recherchée est

$$\gamma(\chi \circ \Phi) = \sum_{\zeta,\ \zeta \circ \Phi = \chi \circ \Phi} \zeta(s) e(\zeta)$$

Les caractères ζ tel que $\zeta \circ \Phi = \chi \circ \Phi$ sont de la forme $\xi\chi$ avec $\xi \in \operatorname{Ker} \Phi^*$. La somme ci-dessus s'écrit donc aussi

$$\begin{aligned} \gamma(\chi \circ \Phi) &= \sum_{\xi \in \operatorname{Ker} \Phi^*} (\xi\chi)(s) e(\xi\chi) \\ &= \chi(s) \sum_{\xi \in \operatorname{Ker} \Phi^*} \xi(s) e(\xi\chi) \end{aligned}$$

Cette somme se déduit de

$$\gamma(\mathbf{1}) = \sum_{\xi \in \operatorname{Ker} \Phi^*} \xi(s) e(\xi)$$

en multipliant par χ les caractères ξ apparaissant dans l'effet et par $\chi(s)$ les signes $\xi(s)$.

Les caractères ξ de $\operatorname{Ker} \Phi^*$ et les signes $\xi(s)$ associés sont ceux qui apparaissent dans le tableau ci-dessous, immédiatement déduit des relations de définition du plan.

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{1} & = & -ABCE & = & ABDF & = & -CDEF & = \\ ACDG & = & -BDEG & = & BCFG & = & -AEFG & = \\ -BCDH & = & ADEH & = & -ACFH & = & BEFH & = \\ -ABGH & = & CEGH & = & -DFGH & = & ABCDEFGH & \end{array} . \tag{43}$$

La multiplication par A de ces caractères du noyau donne $e(A)$ et des produits d'au moins trois lettres. Donc

$$\gamma(A) = e(A)$$

La multiplication par AB donne après élimination des produits de trois lettres et plus:

$$AB = -CE = DF = -GH$$

d'où l'on déduit

$$\gamma(AB) = e(AB) - e(CE) + e(DF) - e(GH)$$

3.

$$\hat{\gamma}(\zeta) = \langle y,\zeta \rangle /16$$

Le modèle sur le vecteur y des 16 observations s'écrit

$$E(y) = \sum \gamma(\delta)\delta$$

où δ décrit l'ensemble des caractères δ associés à des sommes $\gamma(\delta)$ non nulles par hypothèse. La SCE pour tester la nullité de $\gamma(\delta)$ est alors $\|Py - P_0 y\|^2$, où P est le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par les δ apparaissant dans le modèle et P_0 le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les memes vecteurs moins ζ. Il est facile de vérifier en utilisant l'orthogonalité des δ que $Py - P_0 y = \hat{\gamma}(\zeta)\zeta$ et donc que

$$\text{SCE} = \langle y,\zeta \rangle^2 /16$$

$$\hat{\gamma}(AB) = \frac{1}{4}\Big(y(0,0,.,.) + y(1,1,..) + y(0,1,..) + y(1,0,..)\Big)$$

4. Avec 2 expériences, on ne peut estimer que deux combinaisons linéaires d'effets dont une contient le nouveau paramètre μ et est donc inutilisable. Il y a alors au maximum trois équations pour estimer les 4 effets manquants: c'est insuffisant.

5.

$$\text{Ker}\,\Phi_1^* = \{\mathbf{1}, ABG, AE, BEG, AD, BDG, DE, ABDEG$$

6.

$$\delta(A) = e(A) + e(BG) + e(E) + e(D)$$

7. Il est clair que
   $\hat{\delta}(B) - \hat{\gamma}(B)$ est un estimateur de $e(EG)$
   $\hat{\delta}(A) - [\hat{\gamma}(A) - \hat{\gamma}(ABC) + \hat{\gamma}(D)]$ est un estimateur de $e(BG)$
   $\hat{\delta}(A) - [\hat{\gamma}(A) - \hat{\gamma}(ABC) + \hat{\gamma}(D)] - \hat{\gamma}(ABCD)$ est un estimateur de $e(DE)$
   $\hat{\gamma}(BD) + \hat{\delta}(B) - \hat{\gamma}(B)$ est un estimateur de $e(BD)$

   Tous les effets confondus dans le premier plan sont donc rendus estimables par le plan complémentaire.

Corrigé de la section 15

1.
$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Le plan est de résolution 5.

2. Les caractères de T^* associé à un effet principal ou une interaction de deux facteurs sont ceux qui ont une ou deux coordonnées non nulles. Leurs images par Φ^* ne doivent pas appartenir à $\operatorname{Im}\Psi^* = \operatorname{Ker}\Delta^*$, donc doivent vérifier:
$$\Delta^* \circ \Phi^*(\xi) \neq 0 \, .$$
   Donc les colonnes et sommes de deux colonnes du produit matriciel $\Delta^*\Phi^*$ doivent être non nulles. De façon équivalente, les colonnes de $\Delta^*\Phi^*$ doivent être distinctes et non nulles.

3. $\Delta^*\Phi^*$ est alors une matrice 3×8 qui ne peut avoir toutes ces colonnes distinctes et non nulles puisqu'il y a seulement 7 éléments non nuls dans $(2)^3$.

4. Avec cette matrice Δ^*, le produit matriciel $\Delta^*\Psi^*$ est nul, donc $\operatorname{Im}\Psi^* \subset \operatorname{Ker}\Delta^*$. Il est d'autre part clair que Δ^* est de plein rang. Son noyau a donc la même dimension 2 que $\operatorname{Im}\Psi^*$ et est donc égal à $\operatorname{Im}\Psi^*$.

5. La matrice produit
$$\Delta^*\Phi^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   a ses colonnes non nulles et distinctes d'où le résultat.

Corrigé de la section 16

1. Le choix $\mathrm{Bl}_4 = D+E+F$ est celui qui confond les interactions d'ordre le plus élevé. Par exemple, si on prenait $\mathrm{Bl}_4 = D+E$, on confondrait
   $D+E$ à la place de $D+E+F$,
   $A+D+E$ à la place de $A+E+F$,
   etc ...

2. Ce sont les 16 produits entre A, B, C, $D+E+F$, qui apparaissent dans la table ci-dessous:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & C & DEF & CDEF \\ A & AC & ADEF & ACDEF \\ B & BC & BDEF & BCDEF \\ AB & ABC & ABDEF & ABCDEF \end{array}$$

3. Si V est le groupe des blocs, on obtient en décomposant β sur la base des caractères de V:

$$\langle \beta\circ\Psi,\chi\rangle = \left\langle \sum_{\zeta\in V^*} e(\zeta)\zeta\circ\Psi,\xi\circ\Psi \right\rangle = \langle \xi\circ\Psi,\xi\circ\Psi\rangle\, e(\xi)$$

   La dernière égalité résulte de l'injectivité de Ψ^*: la somme sur ζ ne contient qu'un caractère égal (donc non orthogonal) à $\xi\circ\Psi$. On a donc:

$$\langle \beta\circ\Psi,\chi\rangle = 64e(\xi) = 64\,\langle\beta,\xi\rangle/16 = 4\,\langle\beta,\xi\rangle$$

4. Soit ξ un caractère tel que $\chi = \xi\circ\Psi$. On a

$$\langle y,\chi\rangle = \langle\tau,\chi\rangle + 4\,\langle\beta,\xi\rangle + \langle\varepsilon,\chi\rangle$$

   On en déduit que

$$E\left(\langle y,\chi\rangle/64\right) = \langle\tau,\chi\rangle/64 = e(\chi)$$

   et si $\chi_1 = \xi_1\circ\Psi$, $\chi_2 = \xi_2\circ\Psi$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}\left(\langle y,\chi_1\rangle, \langle y,\chi_2\rangle\right) & = & 16\,\mathrm{Cov}\left(\langle\beta,\xi_1\rangle, \langle\beta,\xi_2\rangle\right) + \mathrm{Cov}\left(\langle\varepsilon,\chi_1\rangle, \langle\varepsilon,\chi_2\rangle\right) \\ & = & 16\ \xi_1'\xi_2\ \sigma_0^2 + \chi_1'\chi_2\ \sigma^2 \end{array}$$

   Cette covariance est nulle (en raison de l'orthogonalité des caractères) si $\chi_1 \neq \chi_2$. Elle est sinon égale à $16^2\ \sigma_0^2 + 64\sigma^2$, i.e.:

$$\sigma_1^2 = \mathrm{var}\left(\langle y,\chi\rangle/64\right) = \left(4\sigma_0^2+\sigma^2\right)/64$$

5. On a vu que $\langle y,\chi\rangle/64$ est un estimateur sans biais de $e(\chi)$, pour tout effet non nul confondu avec les blocs. On peut donc prendre $\hat{e}(\chi) = \langle y,\chi\rangle/64$, où de façon plus détaillée:

$$\begin{array}{lcl} \hat{e}(A) & = & \langle y,A\rangle/64 \\ \hat{e}(B) & = & \langle y,AB\rangle/64 \\ & \cdots & \\ \hat{e}(BC) & = & \langle y,BC\rangle/64 \end{array}$$

Par ailleurs on peut prendre:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{9}\sum_{\chi} \left(\langle y,\chi\rangle/64\right)^2$$

ou le caractère χ sur lequel on somme prend toutes les valeurs (ABC, DEF, ..., $ABCDEF$) associées à des interactions de trois facteurs ou plus confondues avec les blocs.

6. A est constant sur le bloc $\operatorname{Ker}\Psi = \Psi^{-1}(0)$ et donc $\operatorname{Ker} A \supset \operatorname{Ker}\Psi$. Comme Ψ est surjective, l'existence d'un morphisme $\mathrm{Bl}_1 : V \to (2)$ tel que $\mathrm{Bl}_1 \circ \Psi = A$ résulte alors d'un résultat classique de théorie des groupes.

7. Si $a\mathrm{Bl}_1 + b\mathrm{Bl}_2 + c\mathrm{Bl}_3 = 0$, on a $aA + bB + cC = 0$ d'où $a = b = c = 0$.

8. $\mathrm{Bl}_4 \circ \Psi$ est un caractère de U donc de la forme $\mathrm{Bl}_4 \circ \Psi = aA+bB+cC+dD+eE+fF$. On peut toujours se ramener au cas $a = b = c = 0$ en soustrayant $a\mathrm{Bl}_1 + b\mathrm{Bl}_2 + c\mathrm{Bl}_3$ à Bl_4.

9. Notons Ω ce morphisme. Si son image était inclue dans un sous-espace K de dimension 3 de $(2)^4$, l'application quotient de $(2)^4$ sur $(2)^4/K$ aurait une matrice (a,b,c,d) non nulle et on aurait $a\mathrm{Bl}_1 + b\mathrm{Bl}_2 + c\mathrm{Bl}_3 + d\mathrm{Bl}_4 = 0$ ce qui est absurde.

devoir1, 1995

DEA Modélisation Stochastique et Statistique, 1995
Module 0S 5 : Contrôle de la qualité et plans d'expériences

Enseignants : A. KOBILINSKY, Camille DUBY

1. Montrez que l'application $\Phi^* : A \mapsto A \circ \Phi$ de T^* dans U^* est un morphisme de groupe.

Soit T un groupe abélien fini. Des éléments t de T et A de T^* sont dits orthogonaux si $A(t) = 0$. L'orthogonal $G^{\perp}$ d'un sous-groupe de T est par définition l'ensemble des éléments de T^* orthogonaux à tout élément de G, i.e. $G^{\perp} = \{A \mid A(G) = 0\}$.

On a le résultat suivant (Hall, Yhe theory of groups, Macmillan 1959, theorem 13.2.2):

$$\mid G^{\perp} \mid = \mid T \mid / \mid G \mid \ ,$$

où $\mid G \mid$ désigne le cardinal du groupe G.

2. Pour $t \in T$, soit ϕ_t l'application définie par $\phi_t(A) = A(t)$. Montrez que l'application $t \mapsto \phi_t$ est un isomorphisme de T sur T^{**}, et que la représentation vectorielle de ϕ_t est la même que celle de t.

3. Soient G_1 et G_2 deux sous groupe de T. Montrez que

$$G_1^{\perp\perp} = G_1$$

$$G_1 \subset G_2 \Longleftrightarrow G_1^{\perp} \supset G_2^{\perp}$$

$$(G_1 \cap G_2)^{\perp} = G_1^{\perp} + G_2^{\perp} \qquad (G_1 + G_2)^{\perp} = G_1^{\perp} \cap G_2^{\perp}$$

$$(\mathrm{Im}\,\Phi)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,\Phi^*, \qquad (\mathrm{Im}\,\Phi)^* = (\mathrm{Ker}\,\Phi)^{\perp}$$

4. Montrez que si Φ est injective, Φ^* est surjective.

5. Prouvez que si A_C vérifie $A_C \circ \Phi = C$, les autres A tels que $A \circ \Phi = C$ forment la classe d'équivalence $A_C + \mathrm{Ker}\,\Phi^*$ du noyau $\mathrm{Ker}\,\Phi^* = \Phi^{*-1}(0)$ de Φ^*, i.e.

$$\Phi^{*-1}(C) = A_C + \mathrm{Ker}\,\Phi^*$$

.

6. Soit $U = (2)^2$, $T = (2)^3$ et A_1, A_2, A_3 (resp. C_1, C_2) les caractères de base additifs de T (resp. U). Ces caractères sont ici les projections sur les différentes coordonnées. Montrez que les égalités $A_1 \circ \Phi = C_1$, $A_2 \circ \Phi = C_2$, $A_3 \circ \Phi = C_1 + C_2$ définissent sans ambiguité l'application Φ de U dans T et que cette application est un morphisme. Précisez les images réciproques des caractères de U^* par Φ^* (qui donnent les paquets d'effets confondus).

Corrigé

1.

$$\Phi^*(A+B) = (A+B)\circ\Phi = A\circ\Phi + B\circ\Phi = \Phi^*(A)+\Phi^*(B)$$

L'égalité du centre résulte de la définition de la somme de deux éléments de T^*. Par définition $(A+B)(t) = A(t)+B(t)$ pour tout $t\in T$, donc, pour tout $u \in U$,

$$(A+B)\circ\Phi(u) = (A+B)(\Phi(u)) = A(\Phi(u)) + B(\Phi(u)) = (A+B)\circ\Phi(u)$$

où de façon équivalente

$$(A+B)\circ\Phi = A\circ\Phi + B\circ\Phi$$

2. Il est clair que ϕ_t est un morphisme de T^* dans (M), c'est à dire un élément de T^{**}. On vérifie facilement que l'application $t\mapsto\phi_t$ est un morphisme de T dans T^{**}. Elle est injective car si $\phi_t = 0$, $A_i(t) = 0$ pour tout caractère de base et donc $t = 0$. Comme T^{**} a même cardinal que T^* et que T, elle est donc aussi surjective et est un isomorphisme.
Pour représenter vectoriellement un élément de T^* ou T^{**}, on utilise la proposition 1.1. Un élément $a_1A_1+\ldots+a_sA_s$ de T^* est représenté par le vecteur $(a_1,\ldots,a_s)$ du groupe produit $(n_1)\times\cdots\times(n_s)$.
Soit e_1, … e_s les générateurs canoniques de T : e_i est le s-uplet qui a toutes ses coordonnées nulles sauf la $i$ème égale à 1. On a $\phi_{e_i}(a_1A_1+\ldots+a_sA_s) = a_iM/n_i$ et les ϕ_{e_i} sont donc les caractères de base de T^*. Si $t = (t_1,\ldots,t_s) = t_1e_1+\cdots+t_se_s$, on a $\phi_t = t_1\phi_{e_1}+\cdots+t_s\phi_{e_s}$ et $(t_1,\ldots,t_s)$ est donc le vecteur représentant l'élément ϕ_t de T^{**}.

3. Montrons par exemple que $\operatorname{Ker}\Phi^* = (\operatorname{Im}\Phi)^\perp$.

$$\operatorname{Ker}\Phi^* = \{A \mid A\circ\Phi = 0\} = \{A \mid A(\operatorname{Im}\Phi) = 0\} = (\operatorname{Im}\Phi)^\perp$$

4.

$$\mid \operatorname{Im}\Phi^* \mid = \mid T^* \mid / \mid \operatorname{Ker}\Phi^* \mid = \mid T^* \mid / \mid (\operatorname{Im}\Phi)^\perp \mid = \mid \operatorname{Im}\Phi \mid$$

d'où le résultat.

5.

$$\begin{gathered} A\in\Phi^{*-1}(C) \iff \Phi^*(A) = C \iff A\circ\Phi = C \iff A\circ\Phi = A_C\circ\Phi \iff \\ (A-A_C)\circ\Phi = 0 \iff \Phi^*(A-A_C) = 0 \iff A - A_C \in \operatorname{Ker}\Phi^* \iff \\ A\in A_C + \operatorname{Ker}\Phi^* \end{gathered}$$

6. On a pour tout $t \in T$

$$\Phi(t) = \Big(A_1 \circ \Phi(t), A_2 \circ \Phi(t), A_3 \circ \Phi(t)\Big) = \Big(C_1(t), C_2(t), (C_1 + C_2)(t)\Big).$$

Ceci montre que Φ est l'application produit des trois morphismes C_1, C_2, $C_1 + C_2$. Elle est donc bien définie et il est connu qu'un tel produit de morphisme est également un morphisme.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \Phi^* &= \{a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \mid a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3(C_1 + C_2) = 0\} \\ &= \{a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \mid (a_1 + a_3) C_1 + (a_2 + a_3) C_2 = 0\} \end{aligned}$$

La dernière égalité est vérifiée ssi $a_1 = a_2 = a_3$ dans le groupe (2), donc $\operatorname{Ker} \Phi^* = \{0, A_1 + A_2 + A_3\}$.
Si $C = c_1 C_1 + c_2 C_2$, l'élément $A_C = c_1 A_1 + c_2 A_2$ vérifie $A_C \circ \Phi = C$ et l'autre élément de $\Phi^{*-1}(C)$ est $A_C + A_1 + A_2 + A_3 = (c_1 + 1) A_1 + (c_2 + 1) A_2 + A_3$. Les ensembles d'effets confondus sont donc

$$\begin{array}{cc} 0 & A_1 + A_2 + A_3 \\ A_1, & A_2 + A_3 \\ A_2, & A_1 + A_3 \\ A_1 + A_2, & A_3 \end{array}$$

exam95.tex

DEA Modélisation Stochastique et Statistique, 1995
Module 0S 5 : Contrôle de la qualité et plans d'expériences

Avril 1995

Enseignants : A. KOBILINSKY, Camille DUBY

On note souvent dans ce texte de la même façon un caractère du groupe des traitements et le caractère induit sur l'ensemble des unités. On rétablira si on le juge utile la distinction en faisant figurer la composition par le morphisme ad hoc ou en coiffant d'un tilde le caractère induit sur U (exemple $\tilde{A} = A \circ \Phi$).

17 Sélection de souches de micro-organismes pour l'affinage du brie

Un industriel souhaite sélectionner des souches de micro-organismes capables de produire des arômes dans le brie. A partir d'une collection, il sélectionne 15 souches intéressantes à étudier.

Avec un même lot de lait, il réalise 16 fabrications d'un fromage en y incorporant 16 mélanges formés à partir des 15 souches avec le plan d'expérience suivant :

Essai	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	$S5$	$S6$	$S7$	$S8$	$S9$	$S10$	$S11$	$S12$	$S13$	$S14$	$S15$	*note*
1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	1049
2	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	1035
3	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	999
4	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	985
5	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	1079
6	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	865
7	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	943
8	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	951
9	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	963
10	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	971
11	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	973
12	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	933
13	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	1057
14	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	1027
15	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	1037
16	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	973

Chaque ligne représente une fabrication d'un fromage, chacune des colonnes S1 à S15 une des 15 souches absente (-1) ou présente ($+1$) dans le mélange. Les fromages sont évalués après affinage par un jury d'analyse sensorielle spécialement entraîné et sont caractérisés par la note d'appréciation générale figurant en dernière colonne, obtenue en faisant la moyenne des notes du jury. Les souches à sélectionner sont celles qui permettent d'obtenir des notes élevées.

1. Ce plan est du type Plackett et Burman, fondé sur une matrice de Hadamard: ses colonnes sont deux à deux orthogonales et orthogonales au vecteur colonne $\mathbf{1}_{16}$. On peut montrer qu'il est régulier, c'est-à-dire qu'il peut être défini par des relations de définition entre les 15 facteurs $S1$ à $S15$. Les questions suivantes ne nécessitent en aucun cas de préciser ces relations de définition.

a) Quelle est la résolution du plan ?

b) Combien de relations de définition indépendantes sont-elles nécessaires pour le définir ?

c) Calculez avec combien d'interactions de 2 facteurs chaque effet principal est confondu en moyenne.

d) A titre d'exemple, précisez avec quel effet principal l'interaction entre S14 et S15 est confondue.

2. Le calcul des effets principaux associés à chaque facteur donne :

moyenne	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	$S5$	$S6$	$S7$	$S8$	$S9$	$S10$	$S11$	$S12$	$S13$	$S14$	$S15$
990	27	-5	18	4	21	14	3	-8	-9	6	-22	-3	-7	-20	-2

En utilisant le graphique "half-normal probability plot" de ces effets (ci-joint), réalisez la sélection des souches les plus intéressantes en justifiant brièvement.

3. Proposez un plan d'expérience en 8 ou 16 unités pour étudier les souches que vous avez sélectionnées.

18 Plans composites de petite taille

Problème composé à partir d'articles de Hartley (Biometrics 1959) et Draper & Lin (Technometrics 1990).

$X_1, \ldots, X_s$ sont s facteurs quantitatifs. On suppose que leur niveaux ont été transformés, par translation et homothétie, de façon à varier dans l'intervalle $[-\delta,\delta]$ où $\delta > 1$.

On fait l'hypothèse que la réponse étudiée y suit un modèle polynomial de degré 2:

$$E\left(y(x_1,\ldots,x_s)\right) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{s} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} \beta_{ij} x_i x_j \; . \tag{44}$$

Les différentes réponses obtenues sont supposées indépendantes de même variance σ^2.

On construit un plan central composite comprenant

a) une fraction régulière $1/2^k$ du plan factoriel complet $\{-1,1\}^s$ formé par les 2^s points $(x_1,\ldots,x_s)$ de coordonnées égales à 1 ou -1.
b) le point central $(0,\ldots,0)$ répété q fois.
c) $2s$ points axiaux M_1, $-M_1$, ..., M_s, $-M_s$. Les deux points M_i et $-M_i$ sur l'axe i ont toutes leurs coordonnées nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ égale à δ_i et $-\delta_i$ respectivement:

$$M_i = (0,\ldots,0,\delta_i,0,\ldots,0) \; , \quad -M_i = (0,\ldots,0,-\delta_i,0,\ldots,0) \; .$$

On note $y(M)$ ou $y(x_1,\ldots,x_s)$ la réponse en un point $M = (x_1,\ldots,x_s) \neq (0,\ldots,0)$, y_{oj} la $j^{\text{ème}}$ réponse au point central.

Dans tout ce problème, un paramètre est dit *estimable* s'il peut être estimé sans biais à partir d'une forme linéaire des observations.

1. Montrez qu'à partir des réponses sur les points axiaux, on peut estimer sans biais les β_i, ainsi que les paramètres α_{ii} définis par $\alpha_{ii} = \beta_0 + \beta_{ii}\delta_i^2$. Précisez les estimateurs des moindres carrés de ces paramètres et leurs variances dans un plan ne comportant que les $2s$ points axiaux.

   Rappel: l'obtention des estimateurs des moindres carrés et de leur variance peut se faire à partir de n'importe quel ensemble de variables déduit des observations par une transformation linéaire inversible. Autrement dit, si y est le vecteur des réponses, on peut partir pour l'estimation de Ty où T est une matrice carrée inversible. Notez que si $y = X\beta+\varepsilon$ avec $\mathrm{var}(\varepsilon) = \sigma^2\mathbf{I}$, on a $Ty = TX\beta+T\varepsilon$ et $\mathrm{var}(T\varepsilon) = \sigma^2 TT'$. C'est ce dernier modèle qui est utilisé pour mener l'estimation à partir de Ty.

2. Précisez pourquoi les estimateurs des moindres carrés de ces paramètres β_i, α_{ii} restent les mêmes dans le plan comportant outre les $2s$ points axiaux, les q répétitions du point central. Donnez l'estimateur des moindres carrés de β_0 et sa variance dans ce plan et déduire les estimateurs des moindres carrés des paramètres β_{ii} et leurs variances.

A partir des espérances $\tau(x_1, \ldots, x_s) = E\,(y(x_1, \ldots, x_s))$ sur l'ensemble $\{1,-1\}^s$ des points de coordonnées 1 ou -1, on définit de façon classique les effets factoriels $e(X_1^{a_1} \ldots X_s^{a_s})$ pour $(a_1, \ldots, a_s) \in (2)^s$:

$$e(X_1^{a_1} \ldots X_s^{a_s}) = \frac{1}{2^s} \sum_{x_1,\ldots,x_s} x_1^{a_1} \cdots x_s^{a_s} \tau(x_1, \ldots, x_s) .$$

On peut identifier l'ensemble $\{1, -1\}^s$ de points considérés au groupe $F = (2)^s$, les X_i aux caractères de base de F. La définition ci-dessus prend alors, en notant τ le vecteur des 2^s espérances aux points de cet ensemble, la forme donnée dans le cours :

$$e(X_1^{a_1} \ldots X_s^{a_s}) = \frac{1}{2^s} \langle \tau, X_1^{a_1} \cdots X_s^{a_s} \rangle .$$

3. Montrez que $e(X_i) = \beta_i$, $e(X_iX_j) = \beta_{ij}$ pour $i < j$ et enfin $e(X_1^{a_1} \ldots X_s^{a_s}) = 0$ si trois ou plus des exposants a_i sont égaux à 1.

Soit $r = s - k$. On note Φ le morphisme de $U = (2)^r$ dans $T = (2)^s$ utilisé pour définir la fraction régulière. Cette fraction est dite de résolution 3* si les éléments du noyau de Φ^* différents de 0 comportent soit trois symboles X_i, soit 5 ou plus. A la différence de ceux de résolution 3, les plans de résolution 3* interdisent donc les relations à 4 symboles telles que $X_1X_2X_3X_4 = 1$ ($X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$ en additif).

4. Montrez que tous les paramètres du modèle (44) sont estimables sur le plan central composite formé des trois parties a, b, c si la partie a est de résolution 3*.

Relation entre résolution 3* et résolution 5 (Draper & Lin, 1990).

5. Montrez que si la fraction régulière est de résolution 3*, le plan défini sur U par les $s - 1$ facteurs $X_1 + X_s, \ldots, X_{s-1} + X_s$ est de résolution 5.

6. Réciproquement montrez que si un plan sur U comportant $s - 1$ facteurs $Z_1, \ldots, Z_{s-1}$ est de résolution 5, le plan défini sur U par les s facteurs $Z_1 + Z_2$, $Z_1 + Z_2 + Z_1$, $\ldots$, $Z_1 + Z_2 + Z_i$, $\ldots$, $Z_1 + Z_2 + Z_{s-1}$ est de résolution 3*.

7. Déduire des deux questions précédentes que si $S_5(r)$ est le nombre maximum de facteurs d'une fraction régulière à 2^r unités de résolution 5, le nombre maximum $S_{3^*}(r)$ de facteurs d'une fraction régulière à 2^r unités de résolution 3* est $S_{3^*}(r) = S_5(r) + 1$.
   En utilisant les valeurs de $S_5(r)$ figurant dans le tableau 9, donnez les colonnes manquantes du tableau 10 où s est le nombre de facteurs étudiés, n_3 le plus petit nombre d'unités permettant de former une fraction régulière de résolution 3* pour ces s facteurs, n_5 le plus petit nombre d'unités permettant de former une fraction régulière de résolution 5, N_3, N_5 les nombres associés d'unités du plan central composite lorsqu'il y a seulement $q = 1$ point central et enfin p le nombre de paramètres du modèle (44) avec s facteurs.

8. Pourquoi le plan central composite composé à partir d'une fraction régulière de résolution 5 permet-il d'estimer tous les paramètres du modèle (44)? Dans quel

r	4	5	6	7	8	9
2^r	16	32	64	128	256	512
$S_5(r)$	5	6	8	11	17	23

TAB. 9 – Nb. maxi. de facteurs dans une fraction régulière de taille 2^r, résolution 5

s	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_3	2^3	2^4		2^5			2^7	2^7	2^7
n_5	2^4	2^4		2^6			2^7	2^7	2^8
N_3	17	27		47			149	151	153
N_5	25	27		79			149	151	281
p	15	21		36			66	78	91

TAB. 10 – Nombre minimum d'unités d'un plan composite pour surface quadratique

cas l'utilisation d'une fraction de résolution 3* peut-elle être plus intéressante que l'utilisation d'une fraction de résolution 5.

19 Mélange de facteurs qualitatifs à 4 et 2 niveaux

On veut étudier, avec 64 unités expérimentales, deux facteurs A et B à 4 niveaux et plusieurs autres facteurs C, D, etc ... à deux niveaux. Les facteurs A et B sont décomposés en pseudofacteurs A_1, A_2, B_1, B_2 à 2 niveaux. On cherche une fraction de résolution 5.

1. Montrez qu'on peut, sans restreindre la recherche, prendre A_1, A_2, B_1, B_2, C et D comme facteurs de base pour la recherche.
2. Trouvez le nombre maximum de facteurs à deux niveaux qu'il est possible d'introduire dans cette fraction.

C, D, E sont maintenant également des facteurs à 4 niveaux décomposés de même que A et B en pseudofacteurs à deux niveaux C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2.

3. Montrez que la fraction à 16 unités pour les 5 facteurs A, B, C, D, E définie par :

$$\begin{array}{rl} A_1 = D_1 + E_1 & A_2 = D_2 + E_2 \;, \\ B_1 = D_1 + E_1 + E_2 & B_2 = D_2 + E_1 \;, \\ C_1 = D_1 + E_2 & C_2 = D_2 + E_1 + E_2 \;, \end{array} \tag{45}$$

   est de résolution 3.

   Soit Φ le morphisme utilisé pour définir le plan. On peut commencer par montrer que le plan est de résolution 3 si on a

   $$\Phi^*(a_1 A_1 + a_2 A_2) \neq \Phi^*(b_1 B_1 + b_2 B_2) \quad \text{quand } (a_1,a2) \neq (0,0) \text{ ou } (b_1,b_2) \neq (0,0)$$

   et l'analogue pour les autres paires de facteurs.

On désire maintenant étudier les seuls 2 facteurs D et E dans des blocs de taille 4. On forme trois répliques de 16 unités. La répartition en blocs est définie par le niveau de A dans la réplique 1, par celui de B dans la réplique 2 et par celui de C dans la réplique 3, où A, B, C sont définis par (45) de même que dans la question précédente.

4. Quelles sont les variances d'estimation des effets factoriels de D et E et les efficacités correspondantes ?

Corrigé de la section 17

1.

a) Dans un plan de Plackett et Burman, les colonnes associées aux différents facteurs sont mutuellement orthogonales. Le plan est donc de résolution III. Le plan proposé est saturé et ne peut donc être de résolution supérieure à III.

b) Il y 2^{15} traitements et $2^4 = 2^{15-11}$ unités expérimentales. Il faut donc 11 relations de définition indépendantes pour définir le plan.

c) Le nombre d'interactions entre deux facteurs est égal à $(15 \times 14)/2$. Chaque effet principal est donc confondu en moyenne avec $14/2 = 7$ interactions entre deux facteurs.

d) Le produit entre les colonnes S14 et S15 donne

$$(+1, +1, -1, -1, +1, -1, +1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, +1),$$

qui est l'opposée de la colonne associée à S11. Donc l'interaction entre S14 et S15 est confondue avec l'effet principal de S11.

2. Sur le graphe, une cassure apparaît nettement entre S9 et S6. Les souches qui semblent produire un effet significatif sont donc S1, S11, S5, S14, S3 et S6. Parmi ces souches, on s'intéresse à celles donnant une note élevée, c'est-à-dire celles qui ont un effet principal positif. On sélectionne donc S1, S5, S3 et S6.

3. On a retenu quatre souches. Avec 16 unités, on peut effectuer un plan factoriel complet. Avec 8 souches, on peut utiliser un plan de résolution 4 en confondant $S1.S3.S5.S6$ avec la moyenne.

Corrigé de la section 18

1. On a pour $i = 1, \dots, s$

$$\begin{aligned} E\left(y(M_i)\right) &= \beta_0 + \beta_i\delta_i + \beta_{ii}\delta_i^2 &=& \quad \delta_i\beta_i + \alpha_{ii} \ , \\ E\left(y(-M_i)\right) &= \beta_0 - \beta_i\delta_i + \beta_{ii}\delta_i^2 &=& -\delta_i\beta_i + \alpha_{ii} \ , \end{aligned}$$

où de façon équivalente

$$\begin{aligned} E\left(\frac{y(M_i) + y(-M_i)}{2}\right) &= \alpha_{ii} \ , \\ E\left(\frac{y(M_i) - y(-M_i)}{2\delta_i}\right) &= \beta_i \ . \end{aligned}$$

Ceci montre que α_{ii} et β_i sont estimables (sans biais).
Pour obtenir leurs estimateurs $\hat{\alpha}_{ii}$ et $\hat{\beta}_i$ des moindres carrés, on peut partir des combinaisons linéaires apparaissant ci-dessus notées z_i et z_{-i} :

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{y(M_i) + y(-M_i)}{2} \ , \\ z_{-i} &= \frac{y(M_i) - y(-M_i)}{2\delta_i} \ . \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier qu'elles sont non corrélées, de variances

$$\operatorname{var}(z_i) = \frac{\sigma^2}{2} \ , \quad \operatorname{var}(z_{-i}) = \frac{\sigma^2}{2\delta_i^2} \ .$$

On en déduit

$$\hat{\alpha}_{ii} = z_i \ , \quad \operatorname{var}\left(\hat{\alpha}_{ii}\right) = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\hat{\beta}_i = z_{-i} \ , \quad \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_i\right) = \frac{\sigma^2}{2\delta_i^2}$$

2. Après reparamétrisation en fonction des α_{ii} et β_i, les espérances des réponses aux q points centraux d'une part, aux $2s$ points axiaux de l'autre font intervenir des groupes complètement distincts de paramètres, à savoir β_0 d'une part, les α_{ii} et β_i de l'autre. Les estimateurs des moindres carrés de ces deux groupes de paramètres peuvent donc être obtenus indépendamment à partir des observations correspondantes. Par suite, les estimations des α_{ii} et β_i restent inchangées. De plus, $E(y_{0j}) = \beta_0$ pour $j = 1, \dots, q$ et l'estimateur des moindres carrés de β_0 et sa variance sont donc donnés par

$$\hat{\beta}_0 = y_{0\bullet} \ , \quad \operatorname{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{q} \ .$$

On en déduit les estimateurs des moindres carrés des β_{ii} :

$$\hat{\beta}_{ii} = (\hat{\alpha}_{ii} - \hat{\beta}_0)/\delta_i^2 = (z_i - y_{0\bullet})/\delta_i^2$$

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{1}{\delta_i^4}\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{q}\right)$$

.

3. Sur l'ensemble $\{1, -1\}^s$, l'écriture vectorielle du modèle est

$$\tau = \beta_0\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{s} \beta_i X_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_{ii}\mathbf{1} + \sum_{i<j} \beta_{ij} X_i X_j \ ,$$

où les vecteurs $\mathbf{1}$, X_i, X_iX_j sont des caractères de F. En effectuant le produit scalaire avec X_i, puis X_iX_j et enfin $X_1^{a_1}\dots X_s^{a_s}$ et tenant compte de l'orthogonalité des caractères, on obtient le résultat cherché.

4. $e(X_iX_j)$ et $e(X_kX_l)$ sont confondus sur la fraction si et seulement si $X_iX_jX_kX_l = 1$ sur U. En résolution 3*, une telle relation, formée de 4 symboles si les indices i, j, k, l sont distincts, de deux symboles si les paires (i,j), (k,l) ont un indice commun, ne peut exister. Une interaction $e(X_iX_j)$ ne peut donc se confondre qu'avec des effets principaux et comme les points axiaux permettent d'estimer ces derniers, cette interaction est elle-même estimable.

5. Montrons que les sommes de 1, 2, 3 et 4 des facteurs $X_i + X_s$ ne peuvent être nulles sur U. Sans perte de généralité, on peut ne considérer que les premiers de ces facteurs. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
(X_1+X_s)+(X_2+X_s)+(X_3+X_s)+(X_4+X_s) & = & X_1+X_2+X_3+X_4\\
(X_1+X_s)+(X_2+X_s)+(X_3+X_s) & = & X_1+X_2+X_3+X_s\\
(X_1+X_s)+(X_2+X_s) & = & X_1+X_2\\
(X_1+X_s) & = & X_1+X_s\ .
\end{array}$$

En résolution 3*, aucune de ces sommes ne peut s'annuler sur U, d'où le résultat. Si $s < 5$, il n'y a pas lieu de tenir compte des sommes de s termes ou plus ci-dessus.

6. En ajoutant $Z_1 + Z_2$ aux caractères 0, Z_1, … , Z_{s-1} deux à deux distincts sur U, on obtient des caractères deux à deux distincts et non nuls puisqu'ils s'expriment comme sommes de 1, 2 ou 3 caractères Z_i. Le dispositif obtenu est donc de résolution 3. De plus en sommant 4 des caractères ainsi obtenus, on réobtient la somme des caractères de départ. Si l'un d'eux est 0, cette somme fait apparaître trois symboles, sinon 4, par exemple :

$$\begin{array}{rcl}
(Z_1+Z_2+0)+(Z_1+Z_2+Z_1)+(Z_1+Z_2+Z_2) & & \\
+(Z_1+Z_2+Z_3) & = & 4(Z_1+Z_2)+Z_1+Z_2+Z_3\\
 & = & Z_1+Z_2+Z_3\\
(Z_1+Z_2+Z_1)+(Z_1+Z_2+Z_2)+(Z_1+Z_2+Z_3) & & \\
+(Z_1+Z_2+Z_4) & = & 4(Z_1+Z_2)+Z_1+Z_2+Z_3+Z_4\\
 & = & Z_1+Z_2+Z_3+Z_4
\end{array}$$

Elle est donc dans tous les cas différente de 0 sur U et on obtient bien un plan de résolution 3$*$.

7. La question 6 montre qu'à partir d'une fraction de résolution 3^* pour 2^r unités comportant le nombre maximum $S_{3^*}(r)$ de facteurs, on peut former une fraction de résolution 5 de même taille comportant $S_{3^*}(r) - 1$ facteurs. On a donc $S_5(r) \geq S_{3^*}(r) - 1$. Il résulte de même de la question 7 que $S_{3^*}(r) \geq S_5(r) + 1$, d'où l'égalité $S_{3^*}(r) = S_5(r) + 1$.

   Avec $q = 1$ point au centre, le tableau recherché est

s	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_3	2^3	2^4	2^4	2^5	2^6	2^6	2^7	2^7	2^7
n_5	2^4	2^4	2^5	2^6	2^6	2^7	2^7	2^7	2^8
N_3	17	27	29	47	81	83	149	151	153
N_5	25	27	45	79	81	147	149	151	281
p	15	21	28	36	45	55	66	78	91

TAB. 11 – Nombre minimum d'unités d'un plan composite pour surface quadratique

8. La fraction de résolution 5 permet d'estimer toutes les interactions, donc tous les paramètres β_{ij} et les autres paramètres peuvent être estimés avec les réponses au point central et points axiaux.
   La fraction de résolution 3^* est intéressante lorsque elle permet d'utiliser moins d'unités que celle de résolution 5, c'est à dire quand $n_3 < n_5$, soit quand $s =$ 4,6,7,9,12.

9. Donnez les estimateurs des moindres carrés des paramètres du modèle (44) et leur variance dans un plan central composite dont la partie a est de résolution 3^*.

Corrigé de la section 19

1. En fait cela résulte du résultat plus général de la proposition qui suit, déjà exposée en cours dans des cas particuliers. On considère dans cette proposition k caractères de base de T. A une renumérotation près, on peut toujours supposer qu'il s'agit de A_1, ... , A_k. On note Δ le morphisme de U dans le groupe produit $O = (n_1) \times \cdots \times (n_k)$ défini par

$$\Delta(\mathbf{u}) = \Big(\frac{n_1}{M} A_1 \circ \Phi(\mathbf{u}) \dots \frac{n_k}{M} A_k \circ \Phi(\mathbf{u})\Big) \ .$$

Proposition 19.1 *Δ est un isomorphisme de U sur O si et seulement si O a même cardinal que U et si l'égalité $(a_1A_1 + \cdots + a_kA_k) \circ \Phi = 0$ implique que $(a_1, \dots ,a_k)$ est l'élément nul de $(n_1) \times \cdots \times (n_k)$.*

Notez que si X_1, ... , X_k sont les caractères de base de O, on a $A_i \circ \Phi = X_i \circ \Delta$.

Démonstration. La seconde condition équivaut à ce que le seul caractère $X = a_1X_1 + \cdots + a_kX_k$ de O tel que $X \circ \Delta = 0$ est $X = 0$, autrement dit à ce que $(\mathrm{Im}\,\Delta)^\perp = \{0\}$. Elle est encore équivalente à l'égalité $|\mathrm{Im}\,\Delta| = |O|$, donc à la surjectivité de Δ. L'injectivité résulte alors immédiatement de l'égalité $|O| = |U|$. $\square$

Dans le cas de figure de l'exercice, une combinaison $a_1A_1+a_2A_2+b_1B_1+b_2B_2+cC+dD$ qui s'annule sur U a forcément tous ses coefficients nuls modulo 2 puisque elle ne fait intervenir que 4 facteurs et que le plan est de résolution 5. La condition d'égalité des cardinals de U et O est par ailleurs trivialement vérifiée. Donc l'application Δ définie par

$$\Delta(\mathbf{u}) = (A_1 \circ \Phi(\mathbf{u}), A_2 \circ \Phi(\mathbf{u}), B_1 \circ \Phi(\mathbf{u}), B_2 \circ \Phi(\mathbf{u}), C \circ \Phi(\mathbf{u}), D \circ \Phi(\mathbf{u}))$$

est un isomorphisme. Si on l'utilise pour identifier U à O, Φ est remplacé par $\Phi \circ \Delta^{-1}$. L'égalité $X_1 \circ \Delta = A_1 \circ \Phi$ montre que $A_1 \circ \Phi$ est remplacé par $X_1 = A_1 \circ \Phi \circ \Delta^{-1}$. De même, les autre facteurs A_2, B_1, B_2, C, D deviennent les caractères de base de O.

2. La résolution 5 implique que chacun des 4 facteurs A, B, C, D doit apparaître dans la relation définissant les autres facteurs E, F, etc ... à deux niveaux. Il est clair que l'on peut ainsi introduire un nouveau facteur E supplémentaire ($E = A_1 + B_1 + C + D$ par exemple). Si on pouvait en introduire un second F, il serait de la forme $F = \cdots + C + D$, avec une combinaison linéaire de A_1, A_2, B_1, B_2 à la place des points. Mais alors la somme $E + F$ serait combinaison des facteurs A et B ce qui est impossible en résolution 5.

3. La fraction est de résolution 3 si $\mathrm{Ker}\,\Phi^*$ ne contient aucune combinaison linéaire non nulle des caractères A_1, ... , E_2 ou n'apparaissent que deux des facteurs. Par exemple, on doit avoir $\Phi^*(a_1A_1 + a_2A_2 + b_1B_1 + b_2B_2) \neq 0$ si $(a_1,a_2,b_1,b_2) \neq (0,0,0,0)$ ou ce qui revient au même

$$\Phi^*(a_1A_1 + a_2A_2) \neq \Phi^*(b_1B_1 + b_2B_2) \quad \text{quand } (a_1,a2) \neq (0,0) \text{ ou } (b_1,b_2) \neq (0,0)$$

En d'autre termes, les images par Φ^* des ensembles de combinaisons non nulles $a_1 A_1 + a_2 A_2$ d'une part, $b_1 B_1 + b_2 B_2$ de l'autre doivent avoir une intersection vide. Or ces images sont

$$\Phi^* \left(\{A_1,A_2,A_1 + A_2\}\right) = \{\tilde{D}_1 + \tilde{E}_1,\tilde{D}_2 + \tilde{E}_2,\tilde{D}_1 + \tilde{E}_1 + \tilde{D}_2 + \tilde{E}_2\}$$

$$\Phi^* \left(\{B_1,B_2,B_1 + B_2\}\right) = \{\tilde{D}_1 + \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2,\tilde{D}_2 + \tilde{E}_1,\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2 + \tilde{E}_2\}$$

et on vérifie qu'elles n'ont pas d'élément commun. Plus généralement on a simplement à vérifier que les deux images ci-dessus et les images similaires pour C, D, E sont deux à deux distinctes. Ces dernières sont

$$\Phi^* \left(\{C_1,C_2,C_1 + C_2\}\right) = \{\tilde{D}_1 + \tilde{E}_2,\tilde{D}_2 + \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2,\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2 + \tilde{E}_1\} \ ,$$

$$\Phi^* \left(\{D_1,D_2,D_1 + D_2\}\right) = \{\tilde{D}_1,\tilde{D}_2,\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2\} \ ,$$

$$\Phi^* \left(\{E_1,E_2,E_1 + E_2\}\right) = \{\tilde{E}_1,\tilde{E}_2,\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2\} \ .$$

On vérifie sans difficulté qu'elles sont deux à deux distinctes.

4. Considérons la réplique 1 où les blocs sont définis par $A_1 = D_1 + E_1$, $A_2 = D_2 + E_2$, ou encore $A_1\Psi = D_1 + E_1$, $A_2\Psi = D_2 + E_2$ en introduisant le morphisme Ψ définissant les blocs. Les effets confondus avec les blocs, en dehors de $e(\mathbf{1})$ sont obtenus en formant les images par Ψ^* des ensembles de combinaisons non nulles $a_1 A_1 + a_2 A_2$: c'est donc $e(D_1 E_1)$, $e(D_2 E_2)$, $e(D_1 D_2 E_1 E_2)$. On obtient de même les effets confondus dans les autres répliques, qui correspondent exactement aux ensembles obtenus dans la question précédente.
   Chaque effet d'interaction entre D et E est confondu dans une des trois répliques, donc estimé avec une efficacité de $2/3$ et une variance de $\sigma^2/32$. Les effets principaux de D et E ne sont confondus dans aucune des répliques et sont donc estimés avec une efficacité de 1 et un variance $\sigma^2/48$.

ensae95.tex, énoncé

Mastère de Statistiques de l'ENSAE 1994-1995

Analyse de Variance et Plans d'Expériences

Problème I

On veut étudier 5 facteurs à 2 niveaux notés A,B,C,D,E avec une première expérience en seulement 8 essais.

1. Quelle est la meilleure résolution que l'on peut obtenir?

On veut estimer les effets principaux de tous les facteurs, en supposant que toutes les interactions sauf $B.D$,$B.E$,$C.D$,$C.E$ sont nulles.

2. Préciser (sans nécessairement les énumérer) les effets factoriels qui ne doivent pas être confondus avec la moyenne. Quelles sont les interactions entre 3 facteurs qui peuvent être confondues avec la moyenne?

3. En déduire une solution pour la fraction en précisant ses contrastes de définition.

Problème II

Un industriel souhaite sélectionner des souches de micro-organismes capables de produire des arômes dans le brie. A partir d'une collection, il sélectionne 15 souches intéressantes à étudier.

Avec un même lot de lait, il réalise 16 fabrications d'un fromage en y incorporant 16 mélanges formés à partir des 15 souches avec le plan d'expérience suivant :

Essai	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	$S5$	$S6$	$S7$	$S8$	$S9$	$S10$	$S11$	$S12$	$S13$	$S14$	$S15$
1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	−1
2	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1
3	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1
4	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1
5	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	−1
6	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1
7	−1	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	−1	+1	+1
8	+1	−1	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	−1	+1
9	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1	−1
10	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1	+1
11	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1	−1
12	−1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	+1
13	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1
14	+1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	−1	+1	+1
15	+1	+1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−1	−1	+1
16	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

Chaque ligne représente une fabrication d'un fromage, chaque colonne représente une des 15 souches ($S1, \ldots, S15$) absente (-1) ou présente ($+1$) dans le mélange. Les fromages sont évalués après affinage par un jury d'analyse sensorielle spécialement entraîné et sont caractérisés par la note d'appréciation générale, obtenue en faisant la moyenne des notes du jury. Les souches à sélectionner sont celles qui permettent d'obtenir des notes élevées.

$Essai$	$Note$
1	1049
2	1035
3	999
4	985
5	1079
6	865
7	943
8	951
9	963
10	971
11	973
12	933
13	1057
14	1027
15	1037
16	973

1. Ce plan est du type Plackett et Burman, fondé sur une matrice de Hadamard. On peut montrer qu'il est régulier, c'est-à-dire qu'il peut être obtenu par des relations de définition entre effets factoriels. Les questions suivantes ne nécessitent en aucun cas de préciser ces relations de définition.

a) Quelle est la résolution du plan ?

b) Combien de relations de définition indépendantes sont-elles nécessaires pour le définir ?

c) Calculez avec combien d'interactions de 2 facteurs chaque effet principal est confondu en moyenne.

d) A titre d'exemple, précisez avec quel effet principal l'interaction entre S14 et S15 est confondue.

2. Le calcul des effets principaux associés à chaque facteur donne :

moyenne	$S1$	$S2$	$S3$	$S4$	$S5$	$S6$	$S7$	$S8$	$S9$	$S10$	$S11$	$S12$	$S13$	$S14$	$S15$
990	27	-5	18	4	21	14	3	-8	-9	6	-22	-3	-7	-20	-2

En utilisant le graphique "half-normal probability plot" de ces effets (ci-joint), réalisez la sélection des souches les plus intéressantes en justifiant brièvement.

3. Proposez un plan d'expérience en 8 ou 16 unités pour étudier les souches que vous avez sélectionnées.

Problème III

Dans une expérience sur la fermentation des cidres, des chercheurs de l'INRA souhaitent étudier la croissance de 2 souches de levure sur un milieu synthétique fixé. Les facteurs traitements à faire varier sont les suivants:

T: la température, à 4 niveaux équi-espacés (notés 1, 2, 3, 4);
O: l'oxygénation, à 4 niveaux équi-espacés (notés 1, 2, 3, 4);
E: le taux d'ensemencement, à 2 niveaux;
S: la souche de levure, à 2 niveaux.

Chaque essai consiste, pour un niveau fixé de ces 4 facteurs, à suivre la croissance des souches pendant environ deux semaines. On analyse ensuite des paramètres liés aux courbes de croissance des différents essais.

Le nombre d'essais est limité à 32 pour des raisons de coût et de durée. On ne peut donc expérimenter que la moitié des traitements. Par ailleurs, on ne peut lancer que 8 essais simultanément. On introduit donc un facteur bloc à 4 niveaux correspondant aux 4 séries de 8 essais. Ce facteur est noté B.

Pour les trois facteurs à 4 niveaux, on notera T_1,T_2, O_1,O_2 et B_1,B_2 les pseudofacteurs utilisés pour la construction du plan. On utilise la correspondance habituelle entre les niveaux 1 à 4 de ces facteurs et les niveaux des pseudofacteurs.

On ne dispose en fait que de 2 bain-marie simultanément. Cela implique que pour chaque série de 8 essais, on ne peut étudier que 2 températures différentes.

1. Montrer que pour satisfaire cette contrainte, il faut et il suffit de confondre T_1, T_2 ou $T_1.T_2$ avec un effet bloc. Préciser dans chaque cas les deux paires de températures qui se retrouvent dans les mêmes blocs.

On rappelle que les effets polynômiaux de la température s'expriment en fonction des effets des pseudofacteurs de la façon suivante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} lin(T) & = & \frac{1}{\sqrt{5}}(2e(T_1) + e(T_2)) \\ quad(T) & = & e(T_1.T_2) \\ cub(T) & = & \frac{1}{\sqrt{5}}(e(T_1) - 2e(T_2)) \end{array} \right.$$

2. En déduire que si l'on fait l'hypothèse que l'effet cubique de la température est nulle, alors l'effet linéaire de la température peut s'exprimer en fonction de $e(T_1)$ seulement, ou en fonction de $e(T_2)$ seulement.

3. En déduire que, sous la même hypothèse, si T_2 est confondu avec les blocs et T_1 est orthogonal à tous les autres effets du modèle, alors l'effet linéaire de la température est estimable, et réciproquement en inversant T_1 et T_2. Quelle est la variance de l'estimateur obtenu dans chacun des deux cas? Lequel des deux cas est préférable pour estimer l'effet linéaire de la température?

4. En choisissant comme contraste de définition de la fraction $T_1.T_2.O_1.O_2.E = 1$, déduire de la question précédente un système de confusion d'effets des traitements avec les blocs

permettant d'estimer tous les effets polynômiaux de degré 1 ou 2 dans un modèle comprenant les effets blocs et tous les effets polynômiaux de degré inférieurs ou égaux à 3.

ensae95.tex, CORRIGE

Mastère de Statistiques de l'ENSAE 1994-1995

Analyse de Variance et Plans d'Expériences

Corrigé de l'examen

Problème I

1. Avec 2^n essais, on peut étudier jusqu'à $f_1 = 2^n - 1$ facteurs en résolution III et $f_2 = 2^{n-1}$ facteurs en resolution IV. Ici, on dispose de $8 = 2^3$ essais donc $f_1 = 7$ et $f_2 = 4$. Pour étudier 5 facteurs, la meilleure résolution que l'on peut obtenir est donc la résolution III.

2. Les effets que l'on veut estimer sont les effets principaux des cinq facteurs. Les effets du modèle sont la moyenne, les effets principaux et les interactions $B.D$, $B.E$, $C.D$, $C.E$.

Les effets qui ne doivent pas être confondus avec la moyenne sont tous les effets obtenus par le produit d'un effet à estimer et d'un effet du modèle. En effet, si cela se produit, les deux effets en question sont nécessairement mutuellement confondus.

Les effets à ne pas confondre sont donc tous les effets principaux, toutes les interactions entre deux facteurs (car elles sont le produit de deux effets principaux), et toutes les interactions entre trois facteurs comprenant soit B et D, soit B et E, soit C et D, soit C et E simultanément (car elles sont le produit d'un effet principal et d'une interaction non nulle).

Les seules interactions entre 3 facteurs que l'on peut confondre sont donc celles qui ne comprennent pas B ou C en même temps que D ou E, c'est-à-dire $A.B.C$ et $A.D.E$.

3. On en déduit immédiatement une solution pour la fraction en prenant comme contrastes de définition $1 = A.B.C$ et $1 = A.D.E$, qui engendrent $1 = B.C.D.E$.

Problème II

1.

a) Dans un plan de Plackett et Burman, les colonnes associées aux différents facteurs sont mutuellement orthogonales. Le plan est donc de résolution III. Le plan proposé est saturé et ne peut donc être de résolution supérieure à III.

b) Il y 2^{15} traitements et $2^4 = 2^{15-11}$ unités expérimentales. Il faut donc 11 relations de définition indépendantes pour définir le plan.

c) Le nombre d'interactions entre deux facteurs est égal à $(15 \times 14)/2$. Chaque effet principal est donc confondu en moyenne avec $14/2 = 7$ interactions entre deux facteurs.

d) Le produit entre les colonnes S14 et S15 donne

$$(+1, +1, -1, -1, +1, -1, +1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, +1),$$

qui est l'opposée de la colonne associée à S11. Donc l'interaction entre S14 et S15 est confondue avec l'effet principal de S11.

2. Sur le graphe, une cassure apparaît nettement entre S9 et S6. Les souches qui semblent produire un effet significatif sont donc S1, S11, S5, S14, S3 et S6. Parmi ces souches, on s'intéresse à celles donnant une note élevée, c'est-à-dire celles qui ont un effet principal positif. On sélectionne donc S1, S5, S3 et S6.

3. On a retenu quatre souches. Avec 16 unités, on peut effectuer un plan factoriel complet. Avec 8 souches, on peut utiliser un plan de résolution IV en confondant $S1.S3.S5.S6$ avec la moyenne.

Problème III

1. La correspondance entre les niveaux de T et ceux des pseudofacteurs T_1 et T_2 est rappelée ci-contre:

Niveau de T	1	2	3	4
Niveau de T_1	-1	-1	$+1$	$+1$
Niveau de T_2	-1	$+1$	-1	$+1$
$T_1.T_2$	$+1$	-1	-1	$+1$

Supposons que l'on confonde T_1 avec un effet bloc, par exemple B_1. Alors les niveaux 1 et 2 de T seront alloués aux blocs ayant le niveau -1 de B_1, alors que les niveaux 3 et 4 de T seront alloués aux blocs ayant le niveau $+1$ de B_1. Donc chaque essai comprendra soit les niveaux 1 et 2 de T, soit les niveaux 3 et 4.

De même si l'on confond T_2 avec un effet bloc, chaque essai comprendra soit les niveaux 1 et 3 de T, soit les niveaux 2 et 4. Et si l'on confond $T_1.T_2$ avec un effet bloc, chaque essai comprendra soit les niveaux 1 et 4 de T, soit les niveaux 2 et 3.

Les trois possibilités épuisent toutes les partitions possibles des quatre niveaux de T en deux groupes de deux, donc il est nécessaire, si l'on veut obtenir une fraction régulière, de confondre T_1, T_2 ou $T_1.T_2$ avec un effet bloc pour satisfaire la contrainte.

2. Si $cub(T) = 0$, alors $e(T_1) = 2e(T_2)$, d'où

$$lin(T) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e(T_1) + e(T_1)/2) = \frac{\sqrt{5}}{2}e(T_1) = \sqrt{5}e(T_2).$$

3. Si T_1 est orthogonal à tous les autres effets du modèle, alors $e(T_1)$ est estimable. Soit $\widehat{e(T_1)}$ son estimateur des moindres carrés, alors 2. montre que $\sqrt{5}/2.\widehat{e(T_1)}$ est un estimateur sans biais de $lin(T)$ de variance $\frac{5}{4}\sigma^2/32$.

De même, si T_2 est orthogonal à tous les autres effets du modèle, alors $\sqrt{5}\widehat{e(T_2)}$ est un estimateur sans biais de $lin(T)$ de variance $5\sigma^2/32$.

La variance est supérieure dans le second cas et on a donc intérêt à confondre T_2 avec les blocs et à s'assurer que T_1 soit orthogonal à tous les autres effets du modèle.

4. La demi-fraction est définie par $1 = T_1.T_2.O_1.O_2.E$. Elle est donc de résolution V si les effets blocs ne sont pas pris en compte et en considérant les pseudofacteurs comme des facteurs ordinaires. Cette fraction permet d'estimer tous les effets polynômiaux de degré 1 ou 2 si l'on suppose que les effets de degré 3 ou plus sont nuls.

Pour que cette propriété soit conservée lorsque l'on introduit les effets blocs dans le modèle, il suffit de ne confondre avec les effets blocs que des interactions entre au moins 3 (pseudo-)facteurs ou, d'après 3., l'effet principal de T_2.

Plusieurs solutions sont possibles dont la suivante:

$$\begin{aligned} B_1 &= T_2 = T_1.O_1.O_2.E \\ B_2 &= T_1.T_2.O_1.S = O_2.E.S \\ B_1.B_2 &= T_1.O_1.S = T_2.O_2.E.S. \end{aligned}$$

exam96.tex

DEA Modélisation Stochastique et Statistique, 1996
Module 0S 5 : Contrôle de la qualité et plans d'expériences

Avril 1996

Enseignant : A. KOBILINSKY

20 Fractions 2^{7-2} de résolution 4

On veut étudier 7 facteurs A, B, C, D, E, F, G à 2 niveaux avec 32 unités.

1. Prouvez qu'on ne peut pas trouver pour cela de plan régulier de résolution 5 (on admettra qu'on peut prendre A, B, C, D, E comme facteurs de base).

On cherche maintenant les différents plans de résolution 4 possibles.

2. On prend A, B, C, D, E comme facteurs de base et on définit F et G comme des produits entre ces facteurs de base. Quels sont, à une permutation près des facteurs de base, les différents choix possibles pour F.
3. Pour chaque choix possible de F, trouver toujours à une permutation près des facteurs de base, tous les choix possibles de G. On classera ces choix en fonction des nombres f et g de lettres dans les produits définissant F et G, ainsi que du nombre h de lettre en commun entre ces deux produits. Donnez pour chaque choix les effets confondus avec la moyenne ($\mathrm{Ker}\,\Phi^\star$).
4. Deux solutions sont dites équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par une permutation des 7 facteurs. Trouvez parmi les solutions précédentes celles qui sont équivalentes (on pourra s'appuyer sur l'examen des noyaux).
5. Après avoir choisi une solution dans chaque classe de solutions équivalentes, préciser le nombre d'interactions confondues et non confondues avec cette solution. En l'absence d'indications précises sur les possibles effets et interactions, quel est le meilleur plan ?

21 Lattice 5×5

Pour expérimenter deux facteurs A et B, à 5 niveaux chacun, sur des blocs de taille 5, on forme plusieurs répliques comportant chacune les $25 = 5 \times 5$ traitements répartis en 5 blocs. La répartition en blocs est définie successivement par les produits AB, AB^2, AB^3, AB^4, A, B.

Les niveaux des facteurs sont codés soit par les éléments 0 à 4 du groupe (5) des entiers modulo 5 (notation additive), soit par les racines 5èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$: $1 = \rho^0$, ρ^1, ρ^2, ρ^3, ρ^4 où $\rho = \exp(2\pi \mathrm{i}/5)$ (notation multiplicative).

1. Préciser la répartition des traitements dans les blocs pour la seconde réplique où les blocs sont définis par AB^2.
2. Quels sont les effets factoriels confondus avec les blocs dans cette 2nde réplique?
3. Quelle réplique obtiendrait-on en utilisant pour définir les blocs le produit A^4B^3 au lieu des produits déjà cités? (justifier la réponse)
4. Préciser les estimations des effets factoriels, les variances et efficacités associées quand on expérimente
   (a) les 4 premières répliques (définies par AB, AB^2, AB^3, AB^4);
   (b) l'ensemble des 6 répliques.
5. Soit $a'\tau = \langle \tau, a \rangle$ un contraste des effets traitements (i.e. a vérifie $\langle \mathbf{1}, a \rangle = 0$). Montrez que

$$\operatorname{var}(a'\hat{\tau}) = \sum_{\chi \in T^\star} | \langle \chi, a \rangle |^2 \operatorname{var}(\hat{e}(\chi)) \tag{46}$$

   où $T^\star$ est le groupe dual du groupe $T = (5)^2$ des traitements. En déduire que

$$\operatorname{var}(a'\hat{\tau}) = \sum_{\chi \in \{AB, AB^2, AB^3, AB^4, A, B\}} \operatorname{var}(\hat{e}(\chi)) \sum_{j=1}^{4} | \langle \chi^j, a \rangle |^2 . \tag{47}$$

Dans la suite de cet exercice sur le lattice 5×5, on veut appliquer le résultat précédent pour obtenir la variance d'estimation de $\tau(t_1) - \tau(t_2)$ où $t_1 = (A_1, B_1)$ et $t_2 = (A_2, B_2)$ sont deux traitement distincts de T. On désigne comme précédemment par χ un caractère différent de $\mathbf{1}$ du groupe T.

6. Comment est défini le vecteur a tel que $a'\tau = \tau(t_1) - \tau(t_2)$ et à quoi est égal le produit scalaire $\langle \chi^j, a \rangle$?
7. On note k_1, k_2 les exposants tels que

$$\rho^{k_1} = \chi(t_1), \quad \rho^{k_2} = \chi(t_2) .$$

   Exprimer $\langle \chi^j, a \rangle$, puis $| \langle \chi^j, a \rangle |^2$ en fonction de ρ^{k_1} et ρ^{k_2}. En déduire que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^4 | \langle \chi^j, a \rangle |^2 \;\; = \;\; & 0 \quad \text{si } \chi(t_1) = \chi(t_2), \text{ i.e. } k_1 = k_2, \\ & 10 \quad \text{si } \chi(t_1) \neq \chi(t_2), \text{ i.e. } k_1 \neq k_2 \pmod 5. \end{aligned} \tag{48}$$

8. Montrez que parmi les 6 caractères AB,AB^2,AB^3,AB^4,A,B, il y en a un et un seul χ tel que $\chi(t_1) = \chi(t_2)$ (donc deux traitements distincts t_1, t_2 figurent ensemble dans un bloc et un seul du plan constitué par les 6 répliques).

9. Donner la variance d'estimation de $\tau(t_1)-\tau(t_2)$, puis l'efficacité lorsqu'on expérimente
   (a) l'ensemble des 6 répliques;
   (b) les 4 premières répliques (distinguer alors deux cas).

22 Mélange de facteurs à 4 et 2 niveaux

On cherche un plan avec 64 unités comportant 3 facteurs A, B, C à 4 niveaux et 3 facteurs D, E, F à 2 niveaux. On admet que, si ce plan est de résolution au moins 4, on peut prendre les 6 pseudofacteurs A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 à deux niveaux, issus de la décomposition des facteurs A, B, C, comme facteurs de base.

1. Montrez qu'il n'existe pas de plan régulier de résolution 5.
2. Donnez un plan de résolution 4.

Toujours avec 64 unités, on cherche un plan pour deux facteurs A, B à 4 niveaux et un nombre k de facteurs à 2 niveaux.

3. Quelle valeur maximum peut prendre k si on veut obtenir un plan régulier de résolution 5 (on admet que l'on peut toujours retenir parmi les facteurs de base les 4 pseudofacteurs A_1, A_2, B_1, B_2 à 2 niveaux issus de la décomposition de A et B).

Corrigé de la section 20

1. Pour que le plan soit de résolution 5, F et G doivent être des produits de 4 ou 5 facteurs de base.
   Si F est produit de 4 facteurs, on peut toujours supposer que $F = ABCD$. Les trois choix possibles pour G, à une permutation près des facteurs de base, sont alors $G = ABCD$ (4 lettres identiques à celle de F), $G = BCDE$ (4 lettres dont 1 distincte de celle de F), $G = ABCDE$ (5 lettres). Ces égalités conduisent respectivement aux égalités $FG = \mathbf{1}$, $FG = AE$, $FG = E$ qui montrent que les plans correspondants ne sont pas de résolution 5.
   Si F est produit de 5 facteurs, i.e. $F = ABCDE$, il est également clair que les deux type de choix pour G, $G = ABCD$, $G = ABCDE$ conduisent à des plans de résolution au plus 3.

2. F doit être un produit entre 3, 4 ou 5 des facteurs de base et les trois solutions possibles sont, à une permutation près

$$F = ABC, \quad F = ABCD, \quad F = ABCDE$$

3. G doit de même que F être un produit entre 3, 4 ou 5 des facteurs de base. En éliminant les solutions pour lesquelles le produit FG est réduit à $\mathbf{1}$ ou à une lettre, on trouve les 7 solutions ci-dessous :

$n0$	f	g	h			Ker $\Phi^\star$			
1	3	3	2	$F = ABC$	$G = BCD$	$\{\mathbf{1},$	$ABCF,$	$BCDG,$	$ADFG\}$
2	3	3	1	$F = ABC$	$G = CDE$	$\{\mathbf{1},$	$ABCF,$	$CDEG,$	$ABDEFG\}$
3	3	4	2	$F = ABC$	$G = BCDE$	$\{\mathbf{1},$	$ABCF,$	$BCDEG,$	$ADEFG\}$
4	3	5	3	$F = ABC$	$G = ABCDE$	$\{\mathbf{1},$	$ABCF,$	$ABCDEG,$	$DEFG\}$
5	4	3	2	$F = ABCD$	$G = CDE$	$\{\mathbf{1},$	$ABCDF,$	$CDEG,$	$ABEFG\}$
6	4	4	3	$F = ABCD$	$G = BCDE$	$\{\mathbf{1},$	$ABCDF,$	$BCDEG,$	$AEFG\}$
7	5	3	3	$F = ABCDE$	$G = ABC$	$\{\mathbf{1},$	$ABCDEF,$	$ABCG,$	$DEFG\}$

4. L'examen des nombres f, g, h montre immédiatement que la solution 5 est équivalente à la solution 3, la solution 7 à la solution 4.
   Les noyaux des solutions 2 et 4 ont des mots (produits) de même longueur (6, 4, 4). Dans chacun de ces noyaux, les mots de longueur 4 ont une lettre commune, à savoir C dans la solution 2, F dans la solution 4. Les 6 autres lettres se répartissent en deux paquets de 3 lettres, chaque paquet étant commun à l'un des mots de 4 lettres et au mot de 6 lettres. Ces deux ensembles sont ABF, DEG dans la solution 2, ABC, DEG dans la solution 4. Les solutions 2 et 4 sont donc équivalentes : n'importe quelle permutation envoyant C sur F, puis ABF globalement sur ABC ou DEG transforme la solution 2 dans la solution 4 (la transposition de C et F est un exemple de telle permutation).
   Les noyaux des solutions 3 et 6 ont également des mots de même longueur (5, 5, 4). Les facteurs se répartissent en un paquet de trois communs aux mots de longueur 5, deux paquets de 2 communs au mot de longueur 4 et à un des mots de longueur 5. Ces paquets sont DEG, AF, BC dans la solution 3, BCD, AF, EG dans

la solution 6. Les solutions sont donc équivalentes : n'importe quelle permutation envoyant DEG globalement sur BCD, et AF globalement sur AF ou EG, par exemple la permutation qui échange E, B d'une part, C, G de l'autre, transforme la solution 3 en la solution 6.

Toute solution est donc équivalente à l'une des trois solutions 1, 2, 3 qui sont non équivalentes puisque les longueurs des mots du noyau y sont respectivement (4, 4, 4), (6, 4, 4) et (5, 5, 4).

5. Les confusions entre interactions viennent des mots de longueur 4 du noyau.
   - Dans la solution 1, le premier mot génère 6 interactions confondues, le second 6 dont une, BC, déjà générée par le le premier mot, le troisième 6 dont une, AF, déjà générée par le premier mot, une autre, DG, déjà générée par le second mot. Il y a donc $15 = 6+5+4$ interactions confondues et par suite $6 = 21-15$ non confondues.
   - Dans la solution 2, les 2 mots de longueur 4 n'ont pas d'interaction en commun et il y a donc 12 interactions confondues et $9 = 21 - 12$ non confondues.
   - Dans la solution 3, il y a 6 interactions confondues, 15 non confondues.

   La solution 3 apparait donc préférable aux deux autres.

Corrigé de la section 21

1. Le tableau suivant donne $A + 2B$ en fonction des niveaux de A en lignes et B en colonne.

A \ B	0	1	2	3	4
0	0	2	4	1	3
1	1	3	0	2	4
2	2	4	1	3	0
3	3	0	2	4	1
4	4	1	3	0	2

   On en déduit la répartition en blocs des traitements (A,B) :

Bloc	traitements (A,B)				
0	(0,0)	(1,2)	(2,4)	(3,1)	(4,3)
1	(0,3)	(1,0)	(2,2)	(3,4)	(4,1)
2	(0,1)	(1,3)	(2,0)	(3,2)	(4,4)
3	(0,4)	(1,1)	(2,3)	(3,0)	(4,2)
4	(0,2)	(1,4)	(2,1)	(3,3)	(4,0)

2. Les effets factoriels confondus avec les blocs dans cette seconde réplique sont les effets associés aux puissances de AB^2 : $e(\mathbf{1})$, $e(AB^2)$, $e(A^2B^4)$, $e(A^3B)$, $e(A^4B^3)$.

3. On a $(A^4B^3)^4 = A^{16}B^{12} = AB^2$ donc AB^2 induit le même système de bloc que A^4B^3. Plus précisément, soit Ψ_1 le morphisme $(A,B) \mapsto A^4B^3$, Ψ_2 le morphisme $(A,B) \mapsto AB^2$, ϕ l'isomorphisme $b \mapsto b^4$ du groupe des blocs $\mathcal{B} = (5)$ sur lui-même. D'après l'égalité ci-dessus, $\phi \circ \Psi_1 = \Psi_2$, donc Ψ_1 et Ψ_2 induisent la même partition.

4. a) Plan comportant les 4 premières répliques
   - Si $\chi \neq \mathbf{1}$ est puissance de A ou B (i.e. $\chi \in \{A,A^2,A^3,A^4,B,B^2,B^3,B^4\}$), l'effet $e(\chi)$ n'est confondu sur aucune des 4 premières répliques et a pour estimation

     $$\hat{e}(\chi) = \frac{1}{4 \times 25}\left(\langle y_1,\chi\rangle + \langle y_2,\chi\rangle + \langle y_3,\chi\rangle + \langle y_4,\chi\rangle\right) ,$$

     où y_i désigne le vecteur des observations sur le réplique i. La variance d'estimation est alors

     $$\mathrm{var}\left(\hat{e}(\chi)\right) = \frac{\sigma^2}{4 \times 25}$$

     et l'efficacité 1.
   - Si $\chi \neq \mathbf{1}$ est puissance de l'un des 4 caractères AB, AB^2, AB^3, AB^4, $e(\chi)$ est confondu sur la réplique correspondante et son estimation est alors la moyenne de ses estimations $\langle y_i,\chi\rangle /25$ sur les autres répliques. La variance correspondante est

     $$\mathrm{var}\left(\hat{e}(\chi)\right) = \frac{\sigma^2}{3 \times 25}$$

     et l'efficacité 3/4.

5. On a $\tau = \sum_\chi \chi e(\chi)$, donc $\hat{\tau} = \sum_\chi \chi \hat{e}(\chi)$ et

   $$\langle \hat{\tau},a\rangle = \sum_\chi \langle \chi,a\rangle \hat{e}(\chi) .$$

   La formule (46) de la variance en découle, en tenant compte de la non corrélation entre les effets factoriels $\hat{e}(\chi)$.
   La variance de $\hat{e}(\chi^j)$ pour $j = 1,\ldots,4$ ne dépend pas de j. En regroupant ensemble les puissances d'un même caractère et éliminant le caractère $\mathbf{1}$ qui vérifie $\langle \mathbf{1},a\rangle = 0$, on obtient la formule (47).

6. a est le vecteur indicé par les traitements qui a ses coordonnées nulles sauf celle d'indice t_1 égale à 1 et celle d'indice t_2 égale à -1. On a

   $$\left\langle \chi^j,a\right\rangle = \chi^j(t_1) - \chi^j(t_2) .$$

7.

   $$\left\langle \chi^j,a\right\rangle = \rho^{jk_1} - \rho^{jk_2},$$

   $$|\left\langle \chi^j,a\right\rangle|^2 = (\rho^{jk_1} - \rho^{jk_2})(\rho^{-jk_1} - \rho^{-jk_2}) = 2 - \rho^{j(k_1-k_2)} - \rho^{-j(k_1-k_2)} .$$

Si $k_1 = k_2$, on trouve $2 - 1 - 1 = 0$ et donc $|\langle \chi^j, a\rangle|^2 = 0$ pour $j = 1, \dots 4$, d'où le résultat.
Si $k_1 \neq k_2$, on a

$$\sum_{j=1}^{4} |\langle \chi^j, a\rangle|^2 = 8 - \sum_{j=1}^{4} \rho^{j(k_1-k_2)} - \sum_{j=1}^{4} \rho^{-j(k_1-k_2)} .$$

Or si $k_1 - k_2 \neq 0 \pmod 5$, $\rho^{k_1-k_2}$ est racine primitive de l'unité et donc

$$\sum_{j=0}^{4} \rho^{\pm j(k_1-k_2)} = 0 .$$

Par suite

$$\sum_{j=1}^{4} \rho^{\pm j(k_1-k_2)} = -1$$

et on a le résultat annoncé.

8. Soit H le sous groupe d'ordre 5 de T engendré par l'élément $t = t_1 - t_2$. Le quotient de $T = (5)^2$ par H s'identifie au groupe (5) et le morphisme quotient $T \to T/H$ à un caractère χ pour lequel $\chi(t) = 0$, donc pour lequel $\chi(t_1) = \chi(t_2)$.
D'autre part, si $\chi(t) = \zeta(t) = 0$, le morphisme $s \mapsto (\chi(s), \zeta(s))$ de T dans $(5)^2$ n'est pas injectif, donc pas surjectif. Son image est un sous groupe G isomorphe à (5) de $(5)^2$ et le morphisme quotient sur $(5)^2/H$ s'identifie à un caractère non nul de la forme $(a,b) \mapsto \alpha a + \beta b$. Ce caractère s'annule sur H, donc $\alpha\chi(s) + \beta\zeta(s) = 0$ pour tout s. Les caractères χ et ζ sont donc colinéaires en mode additif, puissance l'un de l'autre en mode multiplicatif, d'où l'unicité.

9. (a) lorsqu'on expérimente avec les 6 répliques, la variance de $\hat{e}(\chi)$ est toujours égale à $\sigma^2/125$. D'autre part, les sommes $\sum_{j=1}^{4} |\langle \chi^j, a\rangle|$ associées aux caractères $\chi \in \{AB, AB^2, AB^3, AB^4, A, B\}$ sont égales à 10 sauf une égale à 0. La variance donnée par (47) est donc $50\sigma^2/125$, soit à $\sigma^2/2.5$.
En l'absence d'effet bloc, $\tau(t_1)$ et $\tau(t_2)$ sont estimés par les moyennes correspondantes de 6 répétitions et leur différence est estimée par la différence entre ces moyennes qui a pour variance $2\sigma^2/6 = \sigma^2/3$. L'efficacité factorielle est donc

$$\text{efficacité} = \frac{\sigma^2/3}{\sigma^2/2.5} = 5/6 .$$

(b) lorsqu'on expérimente les 4 premières répliques, la variance de $\hat{e}(\chi)$ est égale à $\sigma^2/100$ si χ est puissance de A ou B, à $\sigma^2/75$ si χ est puissance de AB, AB^2, AB^3 ou AB^4. Donc
   - si $A(t_1) = A(t_2)$ ou $B(t_1) = B(t_2)$, on déduit de (47) et (48) que la variance de $\hat{\tau}(t_1) - \hat{\tau}(t_2)$ est

$$10\frac{\sigma^2}{100} + 40\frac{\sigma^2}{75} = \frac{19}{6}\frac{\sigma^2}{5} .$$

En la comparant à la variance $2\sigma^2/4$ obtenue en l'absence d'effet bloc pour une comparaison entre deux moyennes de 4 observations, on obtient l'efficacité $15/19$.

- si $A(t_1) \neq A(t_2)$ et $B(t_1) \neq B(t_2)$, alors t_1 et t_2 ont même valeur pour l'un des quatre caractères AB, AB^2, AB^3 ou AB^4. La variance est alors

$$20\frac{\sigma^2}{100} + 30\frac{\sigma^2}{75} = 3\frac{\sigma^2}{5} \ ,$$

et l'efficacité $5/6$. Noter que l'efficacité est très légèrement supérieure dans ce cas où les deux traitements figurent une fois ensemble au sein d'un bloc.

Corrigé de la section 22

1. Chaque facteur à deux niveaux est défini comme produit entre certains des 6 pseudofacteurs A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. La relation de définition correspondante contient donc 4 lettres distinctes au plus et le plan est au plus de résolution 4.

2.

$$D = A_1B_1C_1, \quad E = A_2B_2C_2, \quad F = A_1A_2B_1B_2C_1$$

3. Si on prend A_1, A_2, B_1, B_2, C, D comme facteurs de base, tout autre facteur doit être un produit faisant intervenir les 4 lettres A, B, C, D, donc de la forme

$$A_1^{a_1}A_2^{a_2}B_1^{b_1}B_2^{b_2}CD \ .$$

Mais si on introduit deux autres facteurs E, F de cette forme, leur produit ne fait intervenir que les 4 lettres A, B, E, F et le plan n'est pas de résolution 5. On a donc $k \leq 3$.